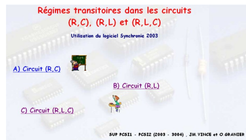
PCSI 1 (O.Granier)

Lycée Clemenceau

Régimes transitoires dans les circuits (RC), (RL) et (RLC)

Un lien vers le TP sur l'étude de ces circuits



Olivier GRANIER

1ère partie

Charge et décharge d'un condensateur

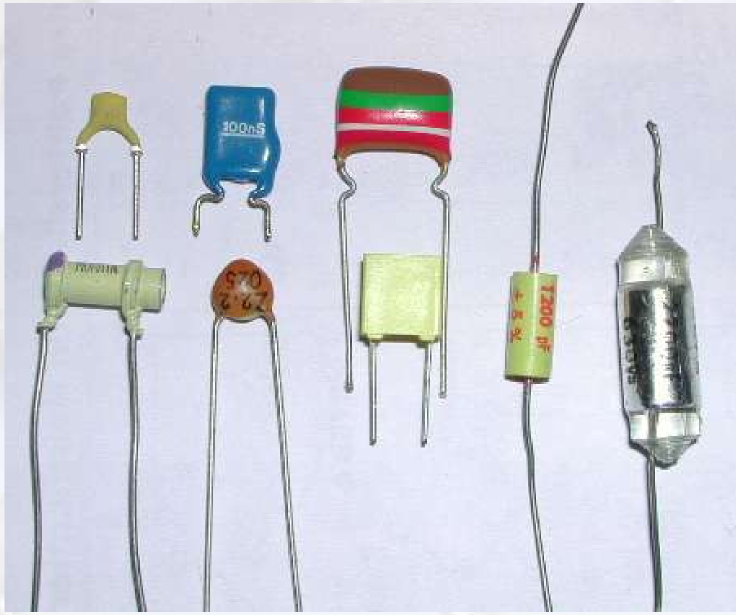
Etude du circuit (R,C)

Olivier GRANIER

➤ Description d'un condensateur :

Un condensateur est assimilable à deux plaques disposées face à face. En règle générale, on pourra dire qu'un condensateur est constitué de deux conducteurs séparés par un isolant (appelé également diélectrique) ; cet isolant peut être l'air, du verre, du plastique … (tableau ci-dessous).

Dielectrique	Permittivité (relative)	Rigidité en kV/M
Alumine	4.5 à 8.5	$600 .10^2$
Air	1	$30 .10^2$
Mica	6 à 9	$350 .10^2$
Verre	5 à 12	$160 .10^2$
Plastique	2 à 5	
Céramique	15 à 30000	



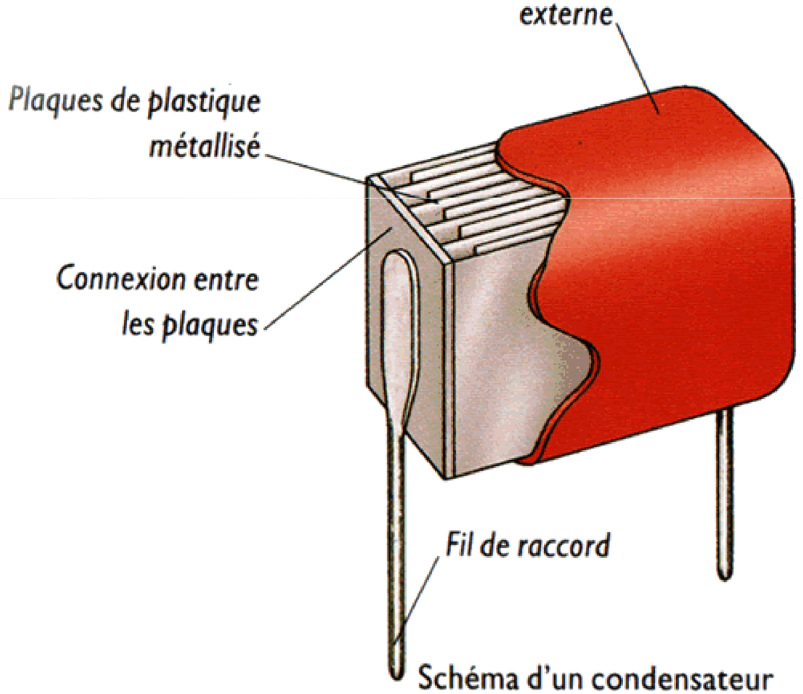


Schéma d'un condensateur à film métallisé

L'intérieur d'un condensateur :

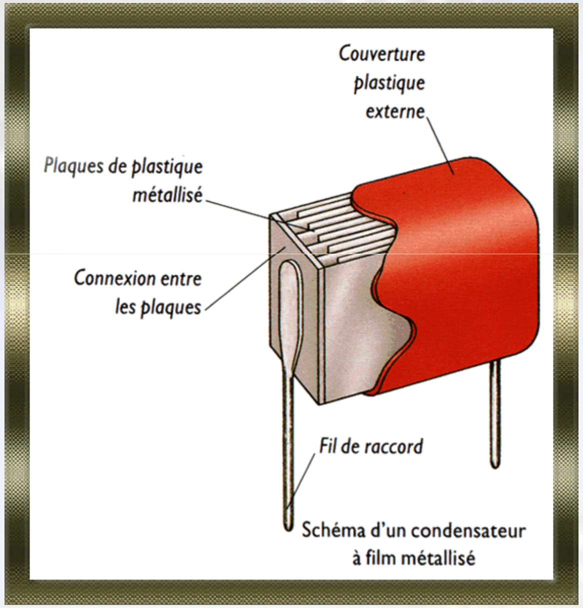
Ce modèle est représentatif de la structure de la plupart des condensateurs. Il est constitué d'armatures métallisées.

On augmente sa capacité en branchant en parallèle des plaques très rapprochées mais qui ne se touchent pas.

Dans ce condensateur, c'est l'air qui joue le rôle de diélectrique.

Utilisation des condensateurs :

Ils sont utilisés dans pratiquement tous les montages électroniques. Par exemple, on utilise des condensateurs variables dans les circuits d'accord de postes de radio.



Soumis à une tension U, un condensateur possède la propriété de se charger et de conserver une charge électrique q, proportionnelle à U :

$$q = CU$$

C'est un réservoir d'énergie.

Cette énergie est restituée lors de la décharge du condensateur.

Ces phénomènes de charge et de décharge ne sont pas instantanés ; ce sont des phénomènes transitoires.

On peut comparer le condensateur à un réservoir qui se remplit et se vide, ou à un poumon qui se gonfle et se dégonfle...

➢ Condensateur plan :

Deux plaques métalliques planes (de surface S) en regard sont distantes de e. Un diélectrique remplit l'espace entre les deux plaques.

La charge q acquise par l'armature supérieure est :

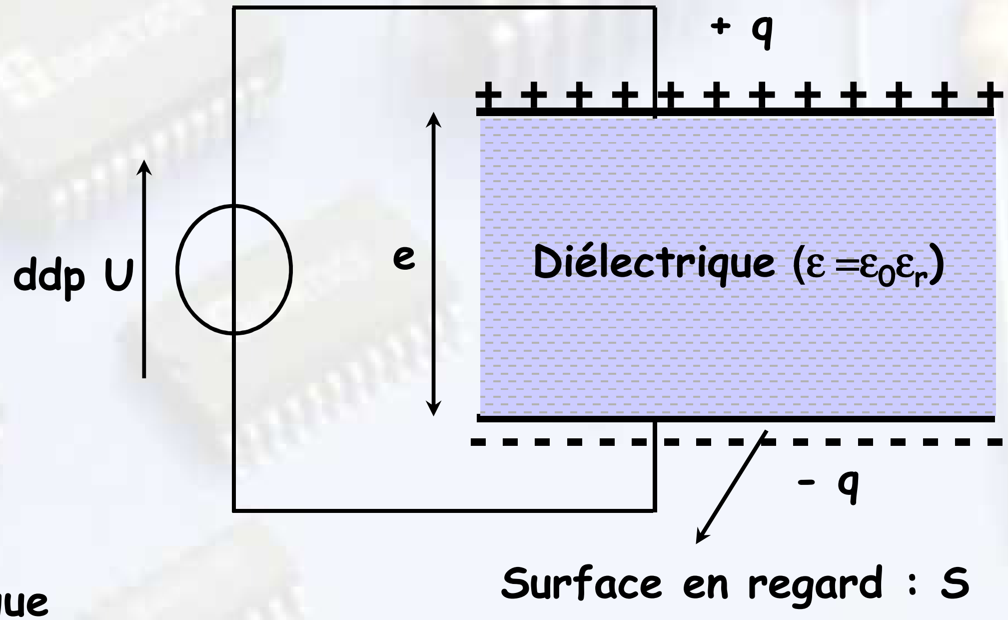
$$q = CU$$

C est la capacité du condensateur plan (exprimée en Farad, F, ou mieux, en μF ou nF) :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$$

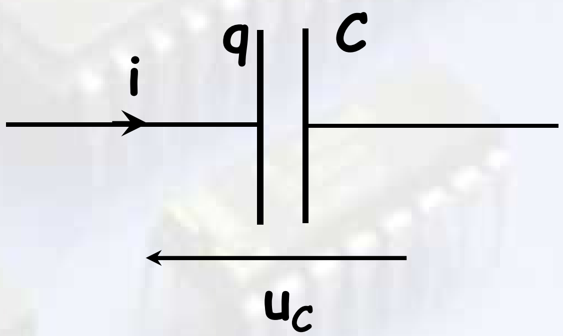
ε_0 : permittivité du vide

ε_r : permittivité relative du diélectrique



➢ Tension, puissance et énergie :

Avec les notations de la figure ci-contre :



$$u_C = \frac{q}{C} \quad ; \quad i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

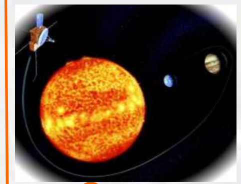
La puissance reçue par le condensateur (de manière algébrique) est :

$$p_C = u_C i = u_C . \frac{dq}{dt} = C u_C . \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_C^2\right)$$

L'énergie E_C emmagasinée par le condensateur s'en déduit :

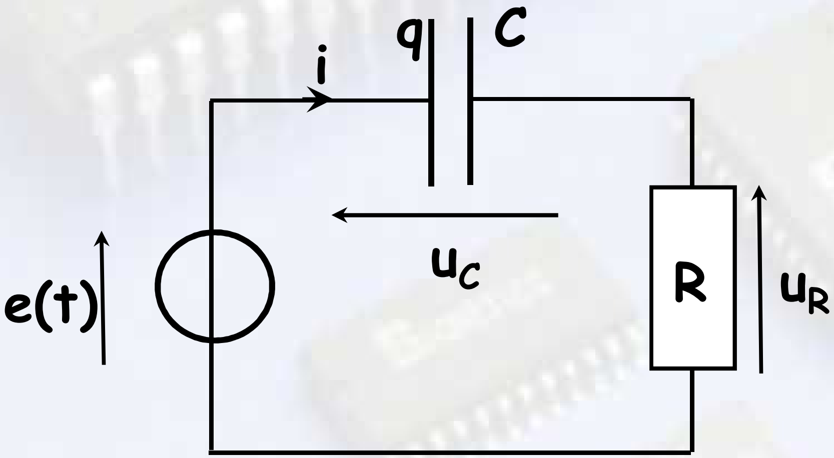
$$p_C = \frac{dE_C}{dt} \qquad soit \qquad \boxed{E_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$$

La charge portée par les armatures est une fonction continue du temps.



➢ Charge d'un condensateur par un échelon de tension :

A $t < 0$: $e(t) = 0$ et à $t > 0$: $e(t) = E = cste$. Alors, pour $t > 0$:



$$u_C = \frac{q}{C} \quad ; \quad i = \frac{dq}{dt} \quad ; \quad u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt}$$

$$u_C + u_R = E \qquad soit \qquad u_C + RC\frac{du_C}{dt} = E$$

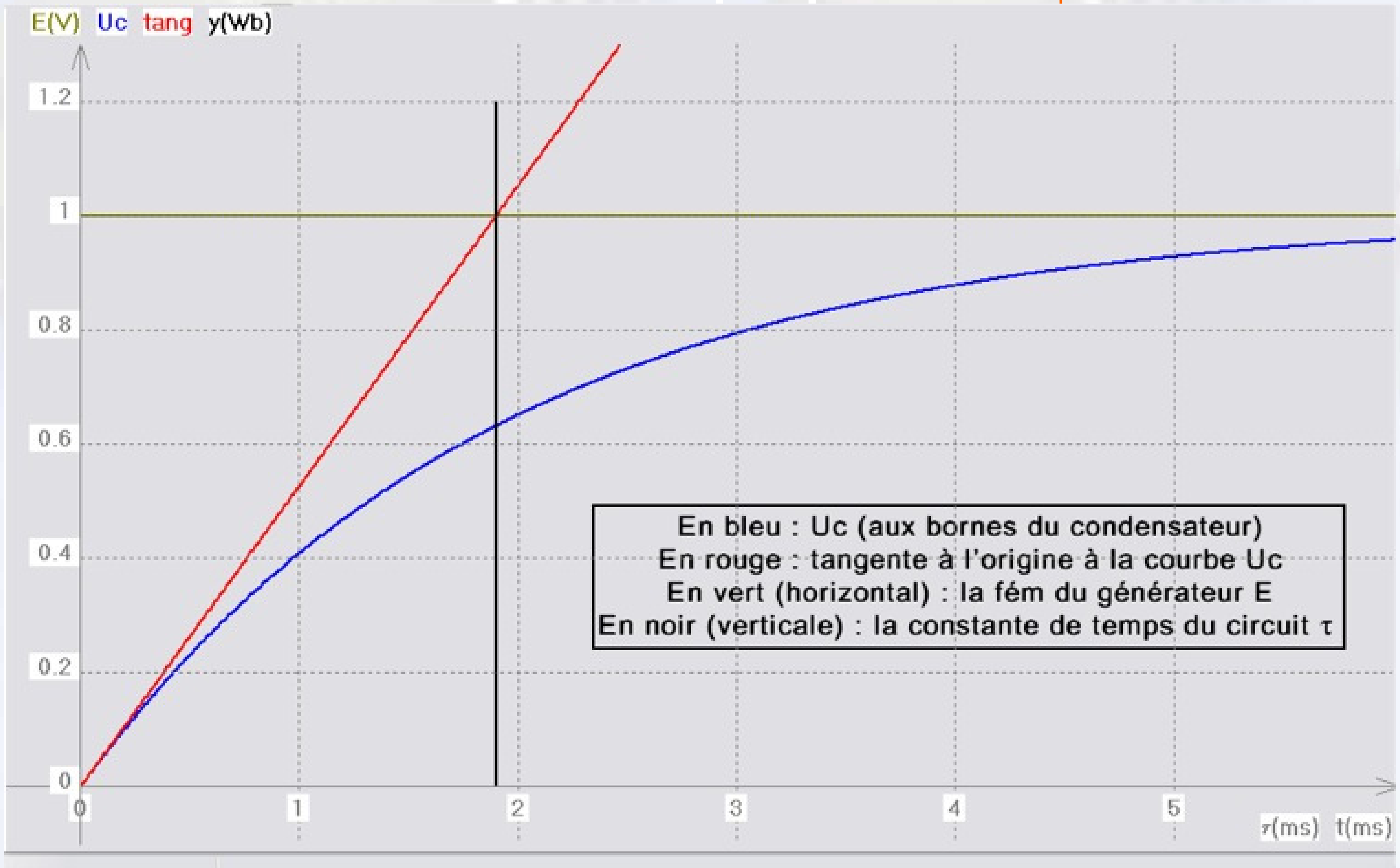
$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{1}{\tau}E \qquad (\tau = RC)$$

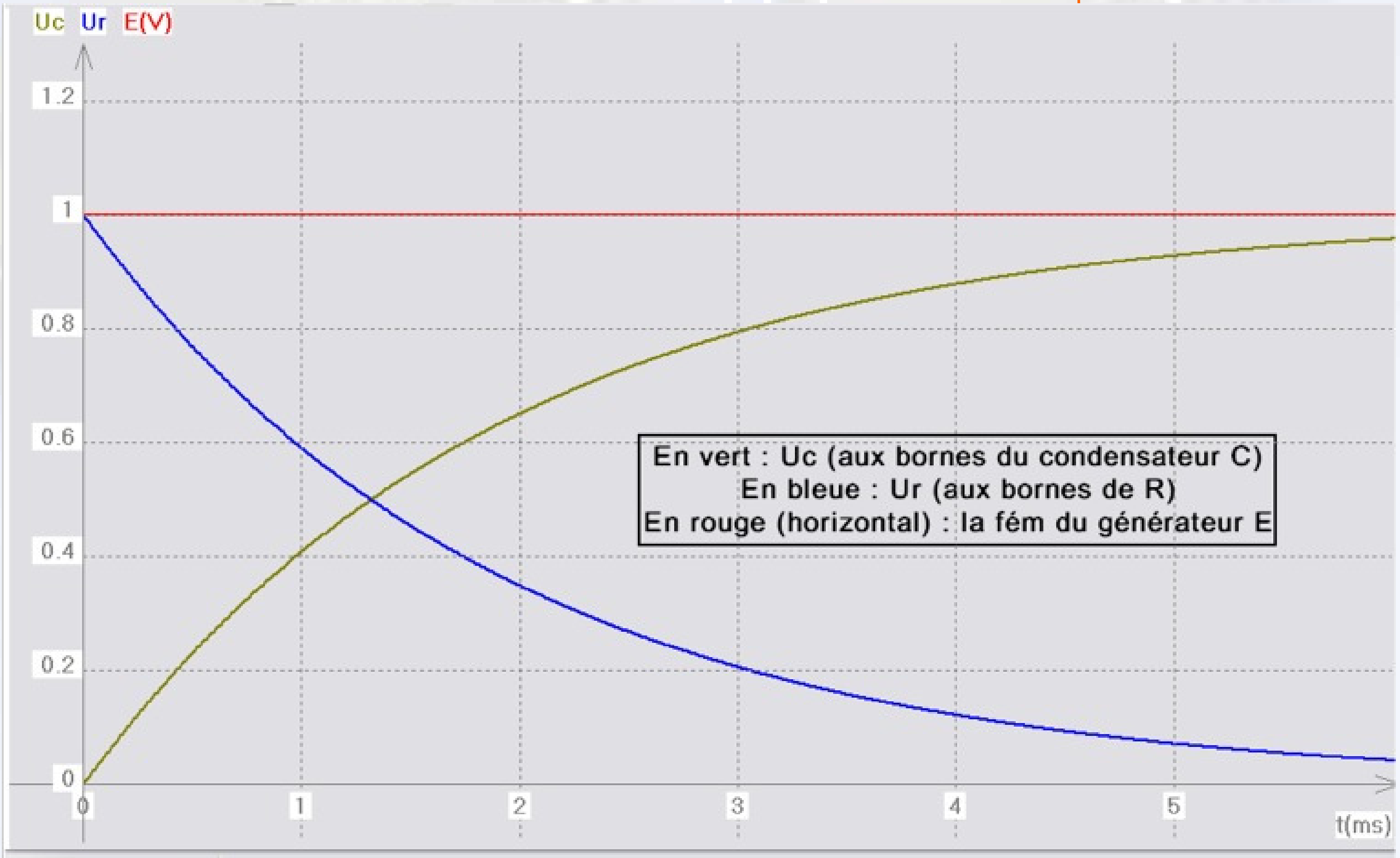
Si le condensateur est déchargé à $t < 0$:

$$\boxed{u_C = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad ; \quad u_R = E - u_C = Ee^{-t/\tau}}$$

τ est la constante de temps du circuit (RC) : elle donne l'ordre de grandeur de la durée de charge du condensateur.

Simulation Regressi


E(V) Uc tang y(Wb)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 1 2 3 4 5
τ(ms) t(ms)
En bleu : Uc (aux bornes du condensateur)
En rouge : tangente à l'origine à la courbe Uc
En vert (horizontal) : la fém du générateur E
En noir (verticale) : la constante de temps du circuit τ



La charge est continue à $t = 0$; l'intensité est discontinue (passe de 0 à E/R de $t = 0^-$ à $t = 0^+$)

Aspect énergétique :

Que devient l'énergie fournie par le générateur ? D'après la conservation de l'énergie, on va montrer que :

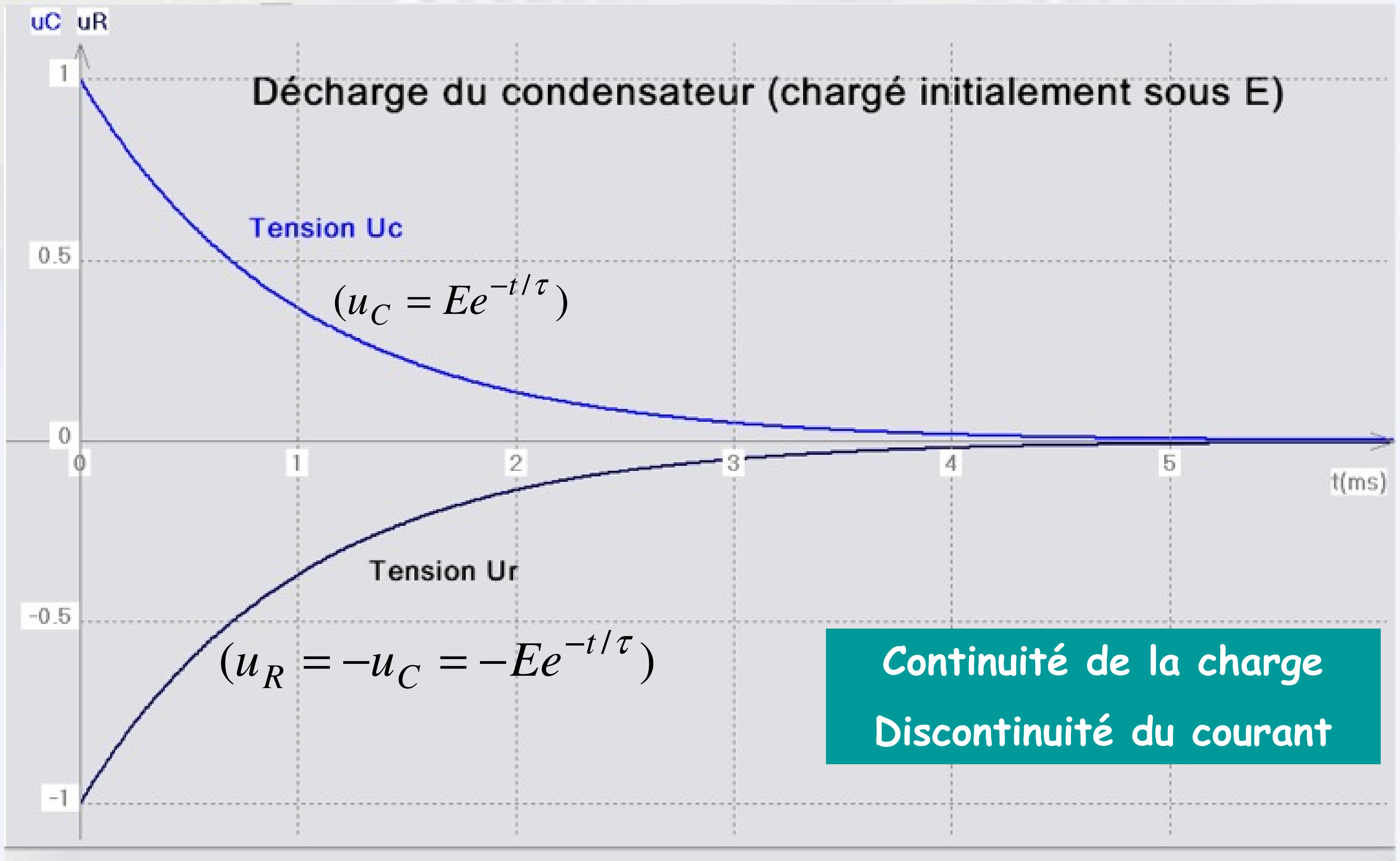
$$\underbrace{E_G}_{\text{Energie fournie par le générateur}} = \underbrace{E_R}_{\text{Energie dissipée par effet Joule dans R}} + \underbrace{E_C}_{\text{Energie emmagasinée par C}}$$

$$E_G = \int_0^{\infty} Ei(t)dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}\tau = CE^2$$

$$E_R = \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-2t/\tau}dt = \frac{E^2}{2R}\tau = \frac{1}{2}CE^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 \qquad d'où \qquad E_G = E_R + E_C$$

➢ Décharge du condensateur :

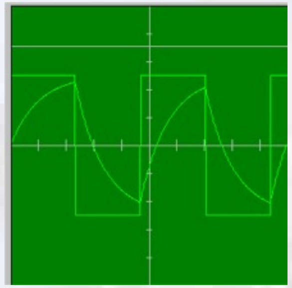


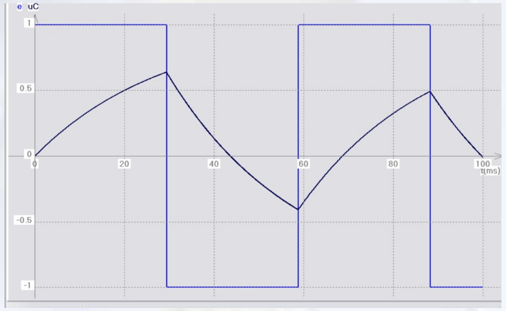
Continuité de la charge

Discontinuité du courant

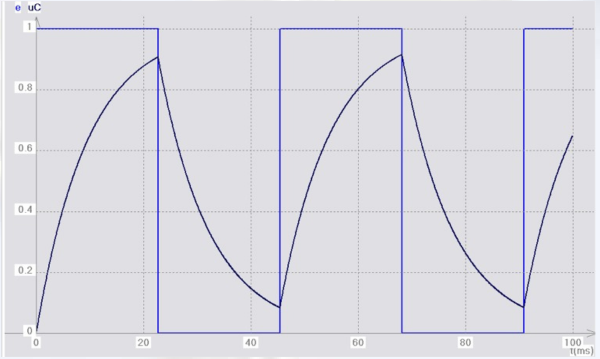
➢ Condensateur soumis à une tension créneau :

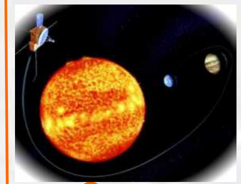
Tension créneau E/-E :





Tension créneau E/0 :



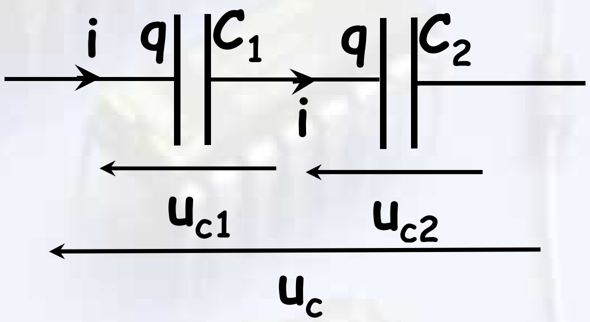


Associations de condensateurs :

En série : $u_C = u_{C_1} + u_{C_2}$

$$u_C = \frac{1}{C_1} q + \frac{1}{C_2} q = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q = \frac{1}{C_{éq}} q$$

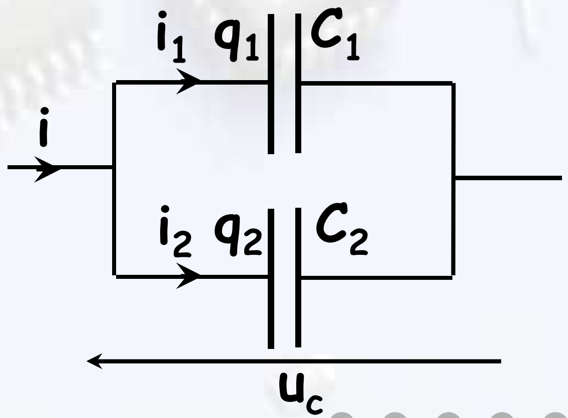
$$\boxed{\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$



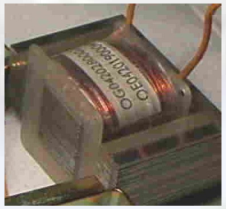
En parallèle : $u_C = \frac{1}{C_1} q_1 = \frac{1}{C_2} q_2$

$$i = i_1 + i_2 \quad ; \quad i = C_1 \frac{du_C}{dt} + C_2 \frac{du_C}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{du_C}{dt}$$

$$\boxed{C_{éq} = C_1 + C_2}$$



2ème partie

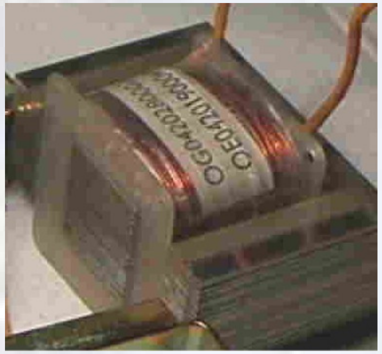


Bobine d'auto-induction

Etude du circuit (R,L)

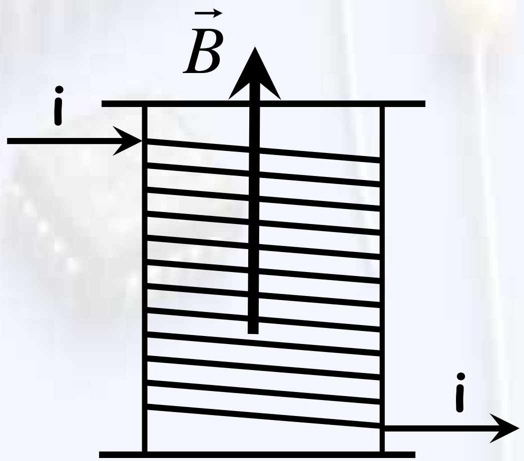
Olivier GRANIER

➢ Bobine d'auto-induction :



Tout bobinage parcouru par un courant crée un champ magnétique proportionnel à l'intensité i.

Lorsque l'intensité i dépend du temps, il apparaît aux bornes de la bobine une fém d'auto-induction (phénomène d'induction).



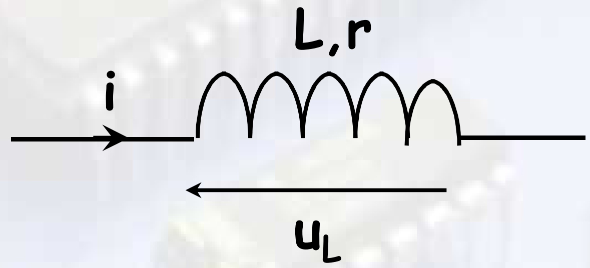
En convention récepteur, cette fém s'écrit (en supposant la bobine idéale, c'est-à-dire sans résistance) :

$$e = L\frac{di}{dt}$$

Le rôle d'une bobine d'auto-induction est de s'opposer à toute modification du courant dans un circuit (loi de Lenz). En particulier, l'intensité du courant dans une bobine est nécessairement continue.

➢ Tension, puissance et énergie :

Avec les notations de la figure ci-contre :



$$u_L = L\frac{di}{dt} + ri$$

La **puissance** reçue par la bobine (de manière algébrique) est (bobine idéale ici, soit r = 0) :

$$p_L = u_L i == L\frac{di}{dt}.i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

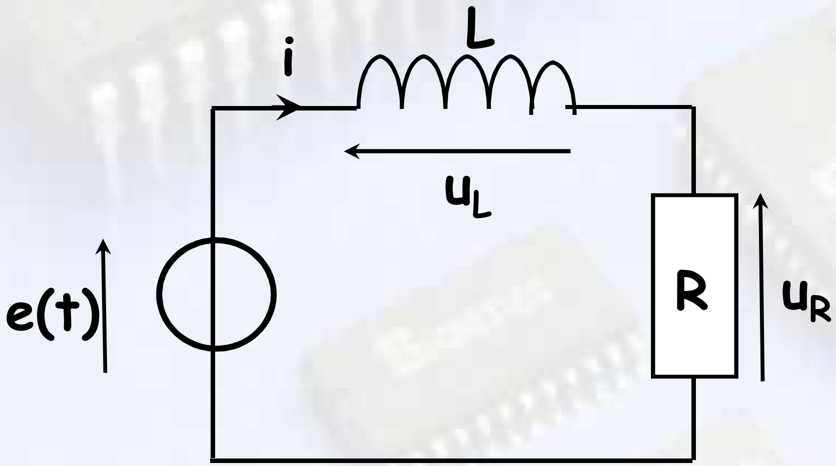
L'énergie E_L emmagasinée par la bobine s'en déduit :

$$p_L = \frac{dE_L}{dt} \qquad soit \qquad \boxed{E_L = \frac{1}{2}Li^2}$$

L'intensité du courant qui traverse une bobine est une **fonction continue du temps.**

➢ Réponse à un échelon de tension : (bobine idéale)

A t < 0 : e(t) = 0 et à t > 0 : e(t) = E = cste. Alors, pour t > 0 :



$$u_R = Ri \quad ; \quad u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt}$$

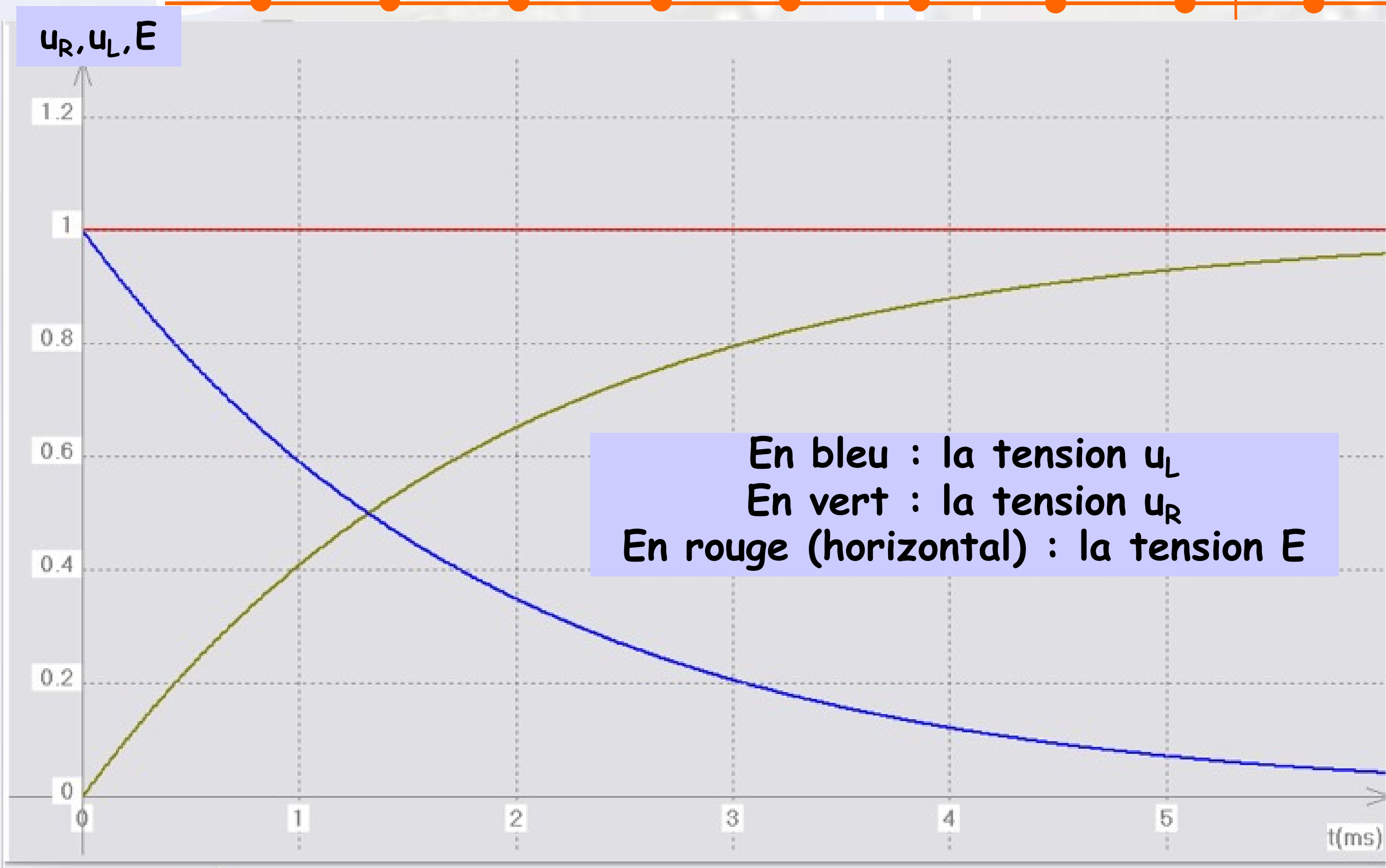
$$u_L + u_R = E \qquad soit \qquad \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + u_R = E$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L}u_R = \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{\tau}u_R = E \qquad (\tau = \frac{L}{R})$$

Si l'intensité du courant est nulle à t < 0 :

$$\boxed{u_R = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad ; \quad u_L = E - u_R = Ee^{-t/\tau}}$$

τ est la constante de temps du circuit (RL) : elle donne l'ordre de grandeur de la durée d'établissement du régime permanent (i=E/R). La bobine se comporte ensuite comme un simple fil.



Circuit (RL)		Circuit (RC)
u_R	$\Leftrightarrow$	u_C
i	$\Leftrightarrow$	q
u_L	$\Leftrightarrow$	u_R

L'intensité (et la tension u_R) est continue à t = 0 ; la tension u_L est discontinue (passe de 0 à E de $t = 0^-$ à $t = 0^+$)

Aspect énergétique :

Que devient l'énergie fournie par le générateur ? D'après la conservation de l'énergie, on va montrer que :

$$\underbrace{E_G}_{\text{Energie fournie par le générateur}} = \underbrace{E_R}_{\text{Energie dissipée par effet Joule dans R}} + \underbrace{E_L}_{\text{Energie emmagasinée par L}}$$

En effet :

$$E = u_L + u_R = Ri + L\frac{di}{dt} \quad donc \quad Ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

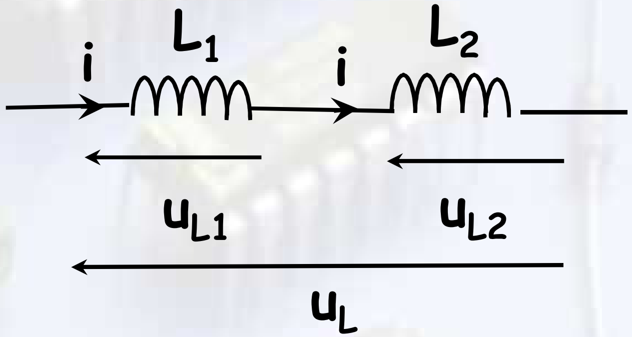
$$\int_0^{\infty} Eidt = \int_0^{\infty} Ri^2 dt + \frac{1}{2}LI_{perm}^2 \qquad (avec\ I_{perm} = \frac{E}{R})$$

➢ Associations d'inductances :

En série : $u_L = u_{L_1} + u_{L_2}$

$$u_L = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = L_{éq} \frac{di}{dt}$$

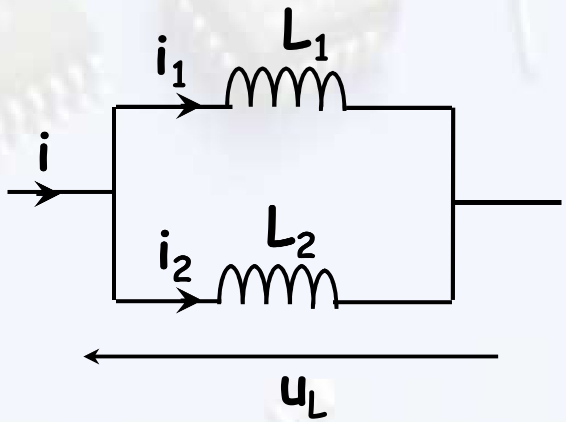
$$\boxed{L_{éq} = L_1 + L_2}$$



En parallèle : $u_L = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$

$$i = i_1 + i_2 \quad ; \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{L_1} u_L + \frac{1}{L_2} u_L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) u_L$$

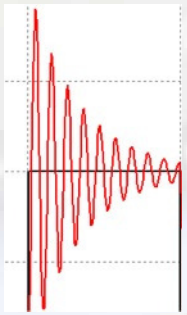
$$u_L = L_{éq} \frac{di}{dt} \quad avec \quad \boxed{\frac{1}{L_{éq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$



Lycée **Clemenceau**

PCSI 1 - Physique

3ème partie



Etude du circuit (R,L,C)

Olivier GRANIER

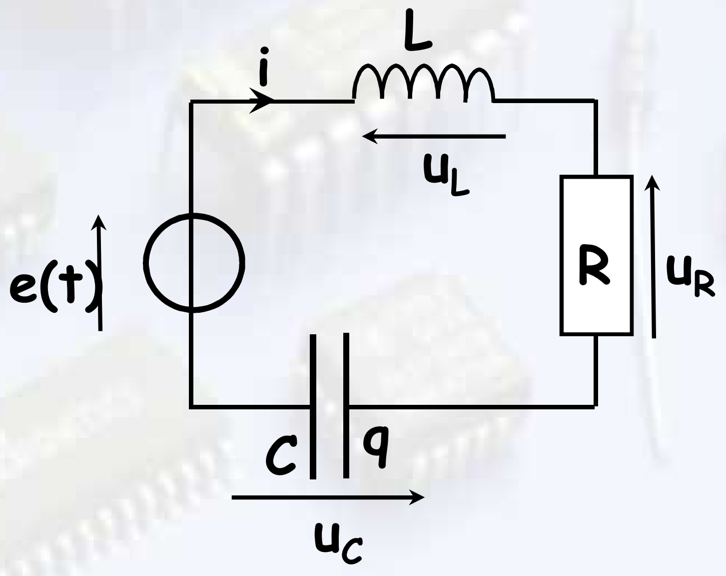
➢ Equation différentielle du circuit (RLC) :

$$u_L + u_R + u_C = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = e(t)$$

$$i = \dot{q} \quad ; \quad u_C = \frac{q}{C} \quad donc \quad i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e(t)$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}e(t)$$



$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e(t)} \quad avec \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad et \quad 2\sigma\omega_0 = \frac{R}{L}$$

➢ Les différents régimes : (voir cours sur les oscillateurs en mécanique)

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\sigma\omega_0\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2e(t)}$$

On recherche des solutions de l'équation homogène de la forme exp(rt), avec r appartenant a priori au corps des complexes. On aboutit au polynôme caractéristique :

$$r^2+2\sigma\omega_0 r+\omega_0^2=0$$

Dont le discriminant est : $\Delta=4\omega_0^2(\sigma^2-1)$

$$\Delta<0 \quad soit \quad \sigma<1 : régime\ pseudo-périodique\ (r_1, r_2\in C)$$

$$\Delta>0 \quad soit \quad \sigma>1 : régime\ apériodique\ (r_1, r_2\in R)$$

$$\Delta=0 \quad soit \quad \sigma=1 : régime\ apériodique\ critique\ (racine\ unique,\ r=-\omega_0)$$

Il faut ensuite rajouter une solution particulière, qui dépend de la forme de e(t).

➢ Réponse du circuit (RLC) à un échelon de tension :

Pour t>0 :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\sigma\omega_0\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2E$$

La solution de l'équation différentielle précédente est alors :

$$\sigma<1 \quad : \quad u_C=e^{-\sigma\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\ t)+B\sin(\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\ t)\right]+E$$

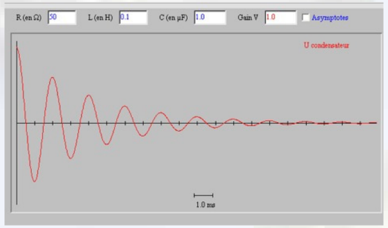
$$\sigma>1 \quad : \quad u_C=e^{-\sigma\omega_0 t}\left[Ae^{(\omega_0\sqrt{\sigma^2-1})\,t}+Be^{(\omega_0\sqrt{\sigma^2-1})\,t}\right]+E$$

$$\sigma=1 \quad : \quad u_C=e^{-\omega_0 t}\left[A+Bt\right]+E$$

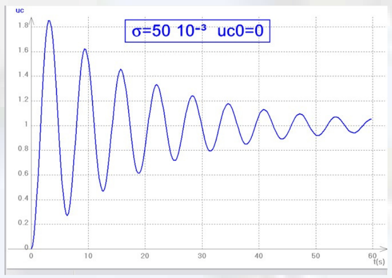
Au bout de $t\approx\dfrac{5}{\sigma\omega_0}$, **le régime permanent est atteint** **(u_C = E)**

Simulation Cabri géomètre :

Simulation Java (JJ.Rousseau) :



Simulation Regressi :



Résistance critique

(σ=1)

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Aspect énergétique :

L'état final est : i=0 et u_C=E (le condensateur est chargé). Montrons que le bilan final énergétique s'écrit :

$$\underbrace{E_G}_{\text{Energie fournie par le générateur}} = \underbrace{E_R}_{\text{Energie dissipée par effet Joule dans R}} + \underbrace{E_C}_{\text{Energie emmagasinée par C}}$$

En effet :

$$E = Ri + \frac{1}{C}q + L\frac{di}{dt} \quad ; \quad Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C{}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$\int_0^\infty Eidt = \int_0^\infty Ri^2dt + \frac{1}{2}CE^2 + 0 \qquad soit \qquad E_G = E_R + E_C$$

On peut calculer l'énergie fournie par le générateur :

$$\int_0^\infty Eidt = \int_0^\infty E.\dot{q}dt = \int_0^\infty CE\left(\frac{du_C}{dt}\right)dt = CE\left[u_C\right]_0^\infty = CE^2$$

On en déduit que l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R vaut :

$$E_R = E_G - E_C = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

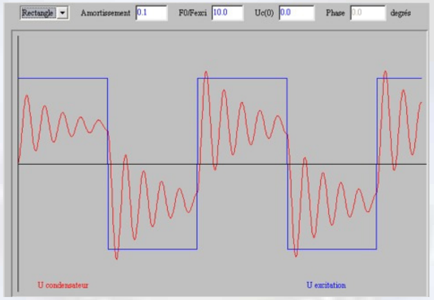
Par conséquent :

$$E_R = E_C = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}E_G$$

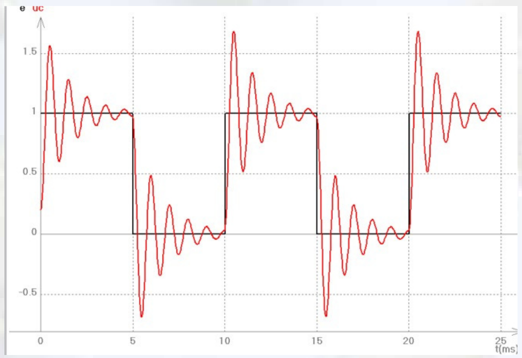
La moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule. On retrouve le même résultat que dans le cas du circuit (RC) : ce n'est pas surprenant puisque l'inductance n'a aucune influence sur les états initial et final du circuit.

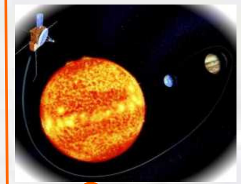
➢ Réponse à une tension créneau :

Animation Java :



Animation Regressi :





➢ Analogies électromécaniques :

Oscillateurs mécaniques	Oscillateurs électriques
x	q
$v = \dot{x}$	$i = \dot{q}$
$\dfrac{1}{k}$	C
m	L
hm	R
$E_C = \dfrac{1}{2} m\dot{x}^2$	$E_C = \dfrac{1}{2} Li^2$
$E_P = \dfrac{1}{2} kx^2$	$E_P = \dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{C}$
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$
$\sigma = \dfrac{h}{2\omega_0}$	$\sigma = \dfrac{R}{2L\omega_0}$