

DIFFUSION DES PARTICULES

Un fluide en équilibre thermodynamique est caractérisé par une température uniforme, une répartition uniforme de particules et par une vitesse moyennes des molécules nulle au repos. En dehors de l'équilibre des phénomènes de transport apparaissent : **conduction de la chaleur, diffusion des particules, ...**

Dans les cas les plus simples, le déséquilibre se traduit par une **inhomogénéité de température**, une **inhomogénéité de concentration** ou une **inhomogénéité dans la distribution des vitesses**.

I - LA DIFFUSION DES PARTICULES : MISE EN ÉVIDENCE

Exemple 1 :

Débouchons un flacon contenant du parfum (gaz) dans un coin de la salle. L'odeur est détectée assez rapidement à l'autre bout de la salle en l'absence de tout courant d'air. Les molécules se dispersent dans l'air de la zone de **forte concentration** vers la **zone de faible concentration**. On dit que **les molécules diffusent**.

Exemple 2 :

Prenons un verre d'eau et versons un peu de sirop de fraise dedans, le plus doucement possible pour ne pas faire de remous. Vous allons observer que le sirop semble partir dans toutes les directions et la couleur se propage lentement des régions les plus foncées vers les régions les plus claires. C'est la diffusion des particules de sirop.

Remarques :

■ Lorsque la concentration des particules (molécules, atomes, électrons, ...) contenues dans un milieu (en équilibre thermique et mécanique) varie d'un point à un autre, ces particules se déplacent des zones où leur concentration est forte vers les zones où leur concentration est faible : on dit que les **particules diffusent dans le milieu**.



■ Le phénomène de diffusion n'existe que lorsque la concentration des particules qui diffusent n'est pas homogène. C'est une situation hors équilibre et le processus de diffusion tend à uniformiser cette concentration (le processus s'arrête lorsque celle-ci est

la même partout). C'est un **processus irréversible** et se fait toujours dans le **sens des concentrations décroissantes**.

- C'est un transport microscopique de matière.

- Lorsque les particules qui diffusent **sont de même nature que celles du milieu dans lequel se déplacent**, on dit qu'il y a **autodiffusion**.

- Lorsqu'il y a transport de matière associé à un mouvement macroscopique, on parle de **convection**. Dans un solide, il ne peut y avoir transport que par diffusion.

- Pour comprendre le phénomène de diffusion nous utiliserons des modèles simples qui nous donneront des **résultats approchés** et pour simplifier les calculs :

- ▶▶ nous supposerons que le milieu dans lequel diffusent les particules n'est pas en mouvement : **il n'y a pas de convection** dans le milieu

- ▶▶ nous limiterons notre étude essentiellement à des **problèmes unidimensionnels** : la concentration de particules ne varie que dans une seule direction et par suite, les particules ne se déplacent en moyenne que dans une direction

II - FLUX DE PARTICULES ET COURANT VOLUMIQUE DE PARTICULES

Considérons un milieu quelconque (gaz, liquide, solide) dans lequel diffusent des particules.

Par définition, le **flux ϕ** de particules à travers la surface **S** **par unité de temps** est le **nombre de particules qui traversent la surface S par unité de temps** : $\Phi = \frac{dN}{dt} \Rightarrow$

$$dN = \Phi dt \quad (\phi \text{ s'exprime en } s^{-1})$$

$$\phi \text{ s'écrit aussi sous la forme : } d\Phi = \vec{j} \cdot \vec{dS} \Rightarrow dN = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt$$

où $\vec{j} = n\vec{V}$ est le **vecteur densité de courant de particules** où \vec{V} est la vitesse des particules et n la **concentration de particules** (nombre de particules par unité de volume). $\|\vec{j}\|$ s'exprime en $m^{-2} \cdot s^{-1}$

- Pour une surface élémentaire dS on écrit : $d^2N = d\Phi dt$

- Φ est une grandeur algébrique.

- Soit d^2N le **nombre de particules**, de **vitesse moyenne \vec{V}** (vitesse de diffusion) qui traversent l'élément de surface $\vec{dS} = dS \vec{u}$ pendant la durée **dt** (entre t et t+dt).

\vec{u} est le vecteur unitaire porté par la normale à dS .

Ce nombre est celui contenu dans le cylindre de base dS et de hauteur $h = \vec{u} \vec{V} dt = V \cos \theta dt$

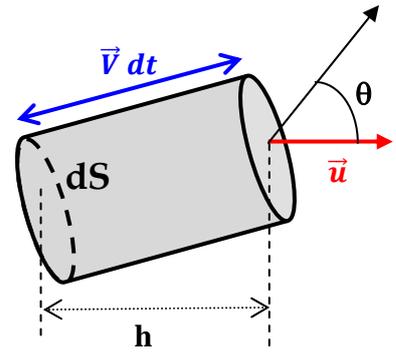
θ est l'angle entre \vec{dS} et \vec{V}

Ce cylindre a pour volume :

$$dV = dS V dt \cos \theta = \vec{V} \vec{dS} dt$$

$$\Rightarrow d^2N = \frac{N}{V} dS \vec{u} \vec{V} dt \text{ soit :}$$

$$d\Phi = \frac{d^2N}{dt} = n \vec{V} \vec{dS} = \vec{j} \vec{dS}$$



Le **flux total** à travers une surface S est : $\Phi = \iint_S \vec{j} \vec{u} dS = \iint_S \vec{j} \vec{dS}$

$$\Rightarrow dN = (\iint_S \vec{j} \vec{dS}) dt$$

conclusion 1 :

le flux de particules Φ est le nombre de particules qui traversent une surface S par unité de temps.

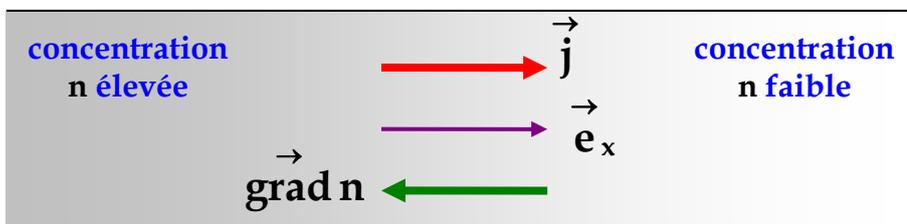
Pendant une **durée dt**, le nombre de particules dN qui traversent une surface S est donné par $dN = \Phi dt$ avec Φ le **flux du vecteur densité de courant de particules à travers S** : $\Phi = \iint_S \vec{j} \vec{dS}$.

$$\vec{j} = n \vec{V}$$

n la **concentration de particules**

III - LA LOI DE FICK

Considérons un milieu où la concentration de particules $n(x, t)$ ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace Ox et du temps t .



La **loi de Fick**, qui est une **loi expérimentale** établie vers 1856 par Adolphe Fick, stipule que : $\vec{j} = -D \frac{\partial n}{\partial x}$

Le coefficient D , qui est toujours **positif** est appelé **coefficient de diffusion** ou **diffusivité** du corps étudié. Il s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$.

Sous forme vectorielle, la **loi de Fick** s'écrit : $\vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(M, t)$

Remarques :

- ① La loi de Fick n'est plus valable si :
 - le gradient de densité est trop important
 - le gradient de densité varie trop vite dans le temps
 - le milieu est anisotrope pour lequel la diffusivité dépend de la direction de l'espace
- ② Le coefficient de diffusion D dépend de la nature des particules qui diffusent et de celles du milieu dans lequel ces particules se déplacent. Par exemple :

	T (K)	D ($m^2.s^{-1}$)
NaCl dans l'eau	298	$1,9 \times 10^{-9}$
Sucre dans l'eau	298	$0,52 \times 10^{-9}$
Oxygène dans l'air	273	$1,78 \times 10^{-5}$
Aluminium dans le cuivre	298	$1,30 \times 10^{-30}$
Vapeur d'eau dans l'air	273	$1,78 \times 10^{-5}$

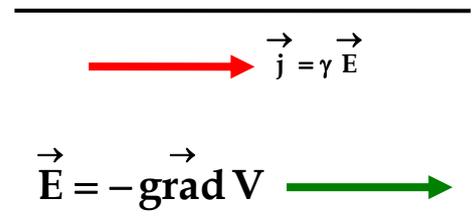
- ③ Le coefficient de diffusion dépend de la température et de la pression.
 - D **croit** quand la **température augmente**
 - D **croit** quand la **pression diminue**

④ Si le milieu est homogène $\frac{\partial n}{\partial x} = 0 \Rightarrow j = 0$

⑤ analogie entre la loi de Fick et la loi d'Ohm

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_S \gamma \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad [\gamma] = S.m^{-1}$$

\vec{j} est le **courant volumique des charges électriques**.



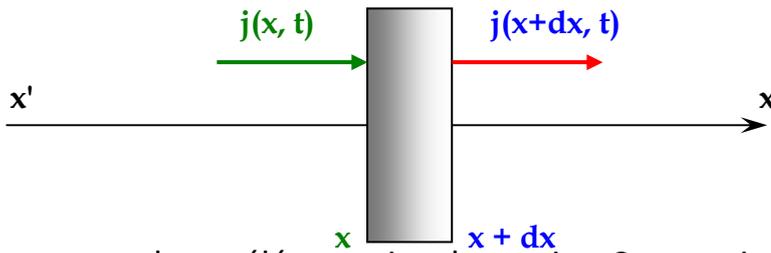
Le flux de particules à travers une surface rappelle celle de l'intensité I de courant et $\Phi \equiv I$

IV - ÉQUATION DE LA DIFFUSION

IV - 1 - diffusion à une dimension

- Considérons le cas des milieux où **il n'y a ni création ni destruction** de particules.
- Considérons le cas où la **concentration** ne dépend que de la coordonnée d'espace x et du temps t : $n = n(x, t)$.

■ Soit $\phi(x, t)$ le flux de particules traversant une surface S normale à Ox orientée selon les x croissants. On a : $\phi(x, t) = j(x, t) S$
 où $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{u}_x$ est le **vecteur densité de courant de particules**.



Considérons un volume élémentaire de section S compris entre les abscisses x et $x + dx$. Ce volume contient $dN = nSdx$ particules.

Faisons le bilan du nombre de particules entre les instants t et $t + dt$.

▶▶ À l'abscisse x , il entre dans le système $\delta N_e = \phi(x, t)dt = j(x, t)Sdt$ particules

▶▶ À l'abscisse $x + dx$, il en sort $\delta N_s = \phi(x + dx, t)dt = j(x + dx, t)S dt$

comme il n'y a ni création ni destruction de particules, la **différence entre ces deux nombres est égale à la variation du nombre dN** de particules qui se trouvent dans le **volume élémentaire $dV = Sdx$** , pendant la **durée dt** (le flux total doit être égal à la variation par unité de temps du nombre de particules contenues dans le volume dV)

$$\delta N_e - \delta N_s = dN(t+dt) - dN(t)$$

$$\Rightarrow dN(t+dt) - dN(t) = \{j(x, t) - j(x+dx, t)\} S dt = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} S dt dx$$

$$\Rightarrow dN(t+dt, x) - dN(t, x) = \{n(t+dt, x) - n(t, x)\} S dx = \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} dt S dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} dt S dx = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} S dx dt \quad \Rightarrow \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}$$

Cette équation exprime la conservation de la matière \equiv c'est l'équation locale de conservation

or d'après la **loi de Fick** : $j = -D \frac{\partial n}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}$

c'est l'équation de la diffusion à une dimension.

Dans le développement précédent, on a supposé que le coefficient de diffusion D est indépendant de x .

conclusion 2 :

à une dimension, la concentration $n(x, t)$ vérifie **l'équation de la diffusion** :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Remarques :

① cas où il y a création ou destruction de particules :

Soit d^2N_a particules **produites** (apportées) ou **absorbées** (disparues) pendant la durée dt au volume élémentaire $dV = Sdx$.

d^2N_a peut être **positif** ou **négatif**

Soit n_a le **nombre de particules créées (ou détruites) par unité de volume et par unité de temps** \Rightarrow $d^2N_a = n_a S dx dt$

$$\text{On a : } \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt = - \frac{\partial j}{\partial x} S dx dt + d^2N_a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + n_a$$

On peut écrire $d^2N_a = n_a S dx dt = (n_{\text{prod}}(x,t) - n_{\text{abs}}(x,t)) S dx dt$

Dans la suite de ce cours, on supposera que $n_a = 0$

② irréversibilité du phénomène de diffusion :

invertissons le temps! Soit $t' = -t$

Soit $n(x, t)$ solution de l'équation de diffusion.

Considérons la fonction $g(x, t) = n(x, -t)$ obtenue par retournement du temps.

$$\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad - \frac{\partial n(x,-t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,-t)}{\partial x^2}$$

IV - 2 - équation de la diffusion à trois dimensions

Considérons le cas général où la concentration n dépend des trois coordonnées de l'espace.

$$\text{à trois dimension} \quad \frac{\partial n}{\partial t} = - \text{div } \vec{j} = - \text{div} \left[-D \text{grad} n \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = \text{div} \left[D \text{grad} n \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n \quad \text{où } \Delta \text{ est le Laplacien.}$$

À trois dimensions $\frac{dN}{dt}$ est l'opposé du débit sortant, soit :

$$\frac{dN}{dt} = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \text{div} \vec{j} \, dV$$

■ **En coordonnées cartésiennes** $\Delta n = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$

$$N(t) = \iiint_V n(M, t) \, dV$$

■ dans le cas où il y a n_a particules créées ou absorbées par unité de volume et par unité de temps, on a : $\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n + n_a$

◆ En régime stationnaire, l'équation de diffusion se réduit à $\Delta n = -\frac{n_a}{D}$. Cette équation rappelle **l'équation de Poisson** à laquelle satisfait le potentiel électrostatique

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si $n_a = 0$, l'équation différentielle obtenue $\Delta V = 0$ est bien connue : c'est **l'équation de Laplace**.

■ Considérons un volume quelconque \mathcal{V} , indéformable, fixe limité par une surface fermée.

- À l'instant t , le nombre de particules est : $N(t) = \iiint_V n(M, t) \, dV$

- À l'instant $t + dt$ le nombre de particules est $N(t + dt) = \iiint_V n(M, t + dt) \, dV$

La variation du nombre de particules contenues dans le volume V entre les instants t et $t + dt$ est donc :

$$dN = N(t + dt) - N(t) = \frac{d}{dt} \left(\iiint_V n(M, t) \, dV \right) dt$$

$$\Rightarrow dN = \left(\iiint_V \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} \, dV \right) dt$$

Théorème d'Ostrogradski $\Rightarrow \phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{j} \, dV$

$$dN = -\phi dt \quad dN = dN_e = -\phi dt$$

$$\Rightarrow \iiint_V \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} \, dV = - \iiint_V \text{div} \vec{j} \, dV$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n(M,t)}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}$$

$$\text{La loi de Fick} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

Dans le cas où il y a destruction ou création de particules, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial n(M,t)}{\partial t} = -\text{div} \vec{j} + n_a \quad \text{avec} \quad n_a = n_p + n_d$$

IV - 3 - équation de diffusion pour un problème à symétrie cylindrique

Dans le cas où le système possède une symétrie cylindrique autour d'un point O, la densité particulière est $n(M, t) = n(r, t)$.

$$\text{La loi de Fick} \Rightarrow \vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(M, t) = -D \frac{\partial n}{\partial t} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{j}(M, t) = j(r, t) \vec{u}_r$$

effectuons un bilan de particules entre t et $t+dt$ pour le système compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$.

Le volume de ce système est $2\pi r h dr$

- la variation du nombre de particules entre t et $t+dt$ est :

$$dN = \frac{\partial n(r, t)}{\partial t} 2\pi r h dr dt$$

- le nombre de particules entrant dans le système entre t et $t+dt$ est :

- entrant à travers le cylindre de rayon r :

$$dN_e = \phi(r, t) dt = j(r, t) 2\pi r h dr dt$$

- sortant à travers le cylindre de rayon $(r + dr)$:

$$dN_s = \phi(r + dr, t) dt = j(r + dr, t) 2\pi (r + dr) h dt$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} dN_e - dN_s &= -2\pi h \{ (r + dr) j(r + dr, t) - r j(r, t) \} dt \\ &= 2\pi h \{ r [j(r + dr, t) - j(r, t)] + j dr \} dt = 2\pi h \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [rj] dr \right\} dt \\ &= 2\pi h \frac{\partial}{\partial r} (rj) dr dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n(r, t)}{\partial t} r dr dt = \frac{\partial}{\partial r} [rj]$$

$$\vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(M, t) \Rightarrow j = -D \frac{\partial n}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[-Dr \frac{\partial n}{\partial r} \right] = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial n}{\partial r} \right]$$

IV - 4 - équation de diffusion pour un problème à symétrie sphérique

Dans le cas où le système possède une symétrie sphérique autour d'un point O , la densité particulaire est $n(M, t) = n(r, t)$.

L'utilisation de l'équation $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ en coordonnées sphériques est déconseillée.

Il est conseillé d'établir l'équation de diffusion en effectuant un bilan de particules sur un système adapté à la géométrie du problème.

La loi de Fick $\Rightarrow \vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}n}(M, t) = -D \frac{\partial n}{\partial r} \vec{u}_r$

$$\Rightarrow \vec{j}(M, t) = j(r, t) \vec{u}_r$$

■ effectuons un bilan de particules entre t et $t+dt$ pour le système compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$.

Le volume de ce système est $4\pi r^2 dr$

■ la variation du nombre de particules entre t et $t+dt$ est :

$$dN = \frac{\partial n(r, t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr dt$$

■ le nombre de particules entrant dans le système entre t et $t+dt$ est :

• entrant à travers la sphère de rayon r :

$$dN_e = \phi(r, t) dt = j(r, t) 4\pi r^2 dt$$

• sortant à travers la sphère de rayon $(r+dr)$:

$$dN_s = \phi(r+dr, t) dt = 4\pi (r+dr)^2 j(r+dr, t) dt$$

$$\Rightarrow dN_e - dN_s = -4\pi \{ (r+dr)^2 j(r+dr, t) - r^2 j(r, t) \} dt \cong -4\pi \frac{\partial [r^2 j(r, t)]}{\partial r} dr dt \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ ordre.}$$

$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 j(r, t)]}{\partial r}$$

Il ne faut pas développer l'expression de la dérivée du produit $r^2 j(r, t)$

$$\vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(M, t) \Rightarrow j = -D \frac{\partial n}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right]$$

donc $g(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, -t)$ n'est pas solution de l'équation de diffusion \Rightarrow la diffusion n'est pas invariante par inversion du temps \Rightarrow la diffusion est un phénomène **irréversible** (en outre elle est **spontanée**).

V - RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION

Trouver une solution de l'équation de diffusion \rightarrow appliquer les conditions aux limites + les conditions initiales ($t = 0$) \Rightarrow solution unique.

V - 1 - cas du régime indépendant du temps

En régime permanent (indépendant du temps) on a :

$$n = n(\mathbf{x}) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

$$\text{si } \sigma_a = 0, \text{ alors : } \Delta n = 0 \Rightarrow \frac{d^2 n(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2} = 0 \Rightarrow \frac{dj}{d\mathbf{x}} = 0$$

\Rightarrow le vecteur densité de particules ne dépend pas de \mathbf{x} , ni de t : c'est un **vecteur constant** dans le domaine considéré.

$$\frac{d^2 n(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2} = 0 \Rightarrow \frac{dn(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \text{cte} = -\frac{j}{D} \Rightarrow n(\mathbf{x}) = -\frac{j}{D} \mathbf{x} + n(0)$$

\Rightarrow La densité volumique de particules est une fonction affine de \mathbf{x} .

Application 1

Déterminer en régime permanent, le flux de particules dans un tuyau de longueur L et de section S . La concentration des molécules qui diffusent est maintenue constante aux extrémités : en $x = 0$, $n = n_1$ et en $x = L$, $n = n_2 < n_1$.

$$\text{En régime permanent } n \text{ ne dépend pas du temps } \Rightarrow \frac{d^2 n(x)}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dn(x)}{dx} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow n(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{or} \quad \text{pour } x = 0, n = C_2 = n_1 \quad \text{et} \quad \text{pour } x = L, n = C_1 L + n_1 = n_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{n_2 - n_1}{L} \Rightarrow n(x) = \frac{n_2 - n_1}{L} x + n_1 \Rightarrow j = -D \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{n_1 - n_2}{L}$$

$$\text{le flux de particules qui traversent le tuyau est : } \phi = jS = \frac{DS}{L} (n_1 - n_2)$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$ le vecteur densité de courant des particules est à flux conservatif.

V - 2 - cas du régime dépendant du temps

La résolution de l'équation de diffusion n'est pas simple en général.

La solution dépend des constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions aux limites temporelles et spatiales.

Conditions aux limites \Rightarrow solution unique

- solutions particulières

Suivant les conditions aux limites imposées, on peut chercher des solutions particulières de la forme :

■ $n(x, t) = f(x) g(t)$

on adopte la méthode de séparation des variables.

■ $n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{Dt}\right)$

on suppose qu'à l'instant $t = 0$, N_0 particules diffusantes par unité de surface sont concentrées en $x = 0$.

■ $n(x, t) = N_0 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} \exp(-u^2) du \right]$ $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$

cas dans lequel en $x = 0$, la concentration des particules diffusantes est maintenue constante égale à N_0 et $n(x > 0, 0) = 0$.

►► Le problème de ces solutions qu'elles vérifient rarement les conditions aux limites imposées par le problème étudié. Cependant,

■ l'équation de diffusion est une équation différentielle linéaire
 \Rightarrow si nous connaissons des solutions particulières $n_i(x, t)$, toute **combinaison de ces solutions** est aussi une solution de l'équation différentielle : $n(x, t) = \sum_i a_i n_i(x, t)$

Application 2

On considère la diffusion de particules dans un liquide suivant la direction Ox. On suppose qu'il n'y a ni production ni absorption des particules dans le liquide. On appelle $C(x, t)$ la concentration volumique de particules et D le coefficient de diffusion. Pour certaines conditions initiales, que l'on suppose réalisées ici, il est possible de chercher une solution de la forme : $C(x, t) = C_0 + f(x)g(t)$ où C_0 est une constante.

1 - Déterminer les fonctions $f(x)$ et $g(t)$. On ne cherchera pas à déterminer pour l'instant les constantes qui apparaîtront dans le calcul.

2 - On suppose qu'à $t = 0$, $C(x, 0) = C_1 + C_2 \sin(px)$ où C_1 , C_2 et p désignant des constantes.

Montrer que la solution ci-dessus convient et déterminer complètement cette solution.

$$1 - \quad C(x, t) = C_0 + f(x)g(t) \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = f(x) \frac{dg}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = g(t) \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Rightarrow f(x) \frac{dg}{dt} = Dg(t) \frac{d^2 f}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{D} \frac{1}{g} \frac{dg}{dt}$$

les variables x et t sont deux variables indépendantes, l'égalité ci-dessus ne peut être réalisée que si chacun des deux membres est égal à une constante A .

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = DA \Rightarrow \ln g = DAt + Cte \Rightarrow g = g_0 \exp(DAt)$$

la fonction g ne pouvant diverger $\Rightarrow A$ doit être < 0 soit $A = -k^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} = Af = -k^2 f \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \Rightarrow f = f_1 \sin kx + f_2 \cos kx$$

$$\Rightarrow C(x, t) = C_0 + g_0 (f_1 \sin kx + f_2 \cos kx) \exp(-Dk^2 t) = C_0 + (f_3 \sin kx + f_4 \cos kx) \exp(-Dk^2 t)$$

$$2 - \quad C(x, 0) = C_0 + f_3 \sin kx + f_4 \cos kx = C_1 + C_1 \sin px \quad C_0 = C_1, \quad f_3 = C_2, \quad f_4 = 0 \quad \text{et} \quad k = p$$

$$\Rightarrow C(x, t) = C_1 + C_2 \exp(-Dp^2 t) \sin px$$

Remarque : relation qualitative entre l'échelle spatiale L et l'échelle de temps τ dans un problème de diffusion

Le coefficient de diffusion est caractéristique du phénomène de diffusion.

$$[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \left[\frac{\text{L}^2}{\tau} \right] \Rightarrow \text{Le coefficient } D \text{ peut se mettre sous la forme } D = \frac{\text{L}^2}{\tau} \Rightarrow$$

$$L \sim \sqrt{D\tau}$$

L étant une dimension du récipient et τ une durée caractéristique du phénomène.