CONIQUES

I - Courbes planes du second degré

Il s'agit des courbes planes qui ont dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ une équation de la forme : $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ avec $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

1) Réduction de l'équation

a) Rotation du repère

On effectue une rotation d'angle de mesure θ et de centre *O*. Donc on obtient un nouveau repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=\vec{i}\cos\theta+\vec{j}\sin\theta$ et $\vec{v}=-\vec{i}\sin\theta+\vec{j}\cos\theta$.

Le point *M* qui a pour coordonnées (x,y) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ a pour coordonnées (x',y') dans le nouveau repère. Donc : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{u}+y'\vec{v}$. Donc $\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$.

Donc la courbe a pour équation dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$:

$$A(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+2B(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+C(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2$$
$$+2D(x'\cos\theta-y'\sin\theta)+2E(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+F=0$$

Ce qui donne en développant :

$$x'^2(A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)+2x'y'[(C-A)\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]$$
$$+y'^2(A\sin^2\theta-2B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)+2x'(D\cos\theta+E\sin\theta)+2y'(-D\sin\theta+E\cos\theta)+F=0$$

Le coefficient du terme $x'y'$ est donc : $\alpha=(C-A)\sin 2\theta+2B\cos 2\theta$.

Si $C\neq A$, il existe un réel θ tel que $\tan 2\theta=-\dfrac{2B}{C-A}$, et dans ce cas $\alpha=0$.

Si $C=A$, pour $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, on a $\alpha=0$.

> Donc il existe un repère orthonormé (obtenu par rotation) dans lequel l'équation de la courbe est de la forme : $A'x'^2+B'y'^2+2C'x'+2D'y'+E'=0$ avec $(A',B')\neq(0,0)$.

En effet, si $A'=B'=0$, on a : $\begin{cases}A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta=0\\ A\sin^2\theta-2B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta=0\end{cases}$.

Donc : $\begin{cases}A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta=0\\ A+C=0\end{cases}$ (en additionnant).

Donc : $\begin{cases}A\cos 2\theta+B\sin 2\theta=0\\ C=-A\end{cases}$ (en additionnant).

Si $C=A$, c'est impossible car on aurait $A=C=0$, donc $B=0$ car $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

Si $C\neq A$, on a $\tan 2\theta=-\dfrac{2B}{C-A}$, ce qui donnerait $\tan 2\theta=\dfrac{B}{A}$ avec $C=-A$. On aurait donc $\cos 2\theta\left(\dfrac{A^2+B^2}{A}\right)=0$, donc $A=B=0$, ce qui est aussi impossible.

b) Translation du repère

L'équation est maintenant $A'x'^2+B'y'^2+2C'x'+2D'y'+E'=0$ avec $(A',B')\neq(0,0)$.

- Si $A'\neq 0$ et $B'\neq 0$, l'équation équivaut à $A'\left(x'+\dfrac{C'}{A'}\right)^2+B'\left(y'+\dfrac{D'}{B'}\right)^2+E'-\dfrac{C'^2}{A'^2}-\dfrac{D'^2}{B'^2}=0$.

Donc si Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{C'}{A'},-\frac{D'}{B'}\right)$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$, l'équation de la courbe dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est de la forme : $A'X^2+B'Y^2+F'=0$ avec $(A',B')\neq(0,0)$.

- Si $A'\neq 0$ et $B'=0$, l'équation équivaut à $A'\left(x'+\frac{C'}{A'}\right)^2+2D'y'+E'-\frac{C'^2}{A'^2}=0$. Donc si Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{C'}{A'},0\right)$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$, l'équation de la courbe dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est de la forme : $A'X^2+2D'Y+F'=0$ avec $A'\neq 0$.
- Si $A'=0$ et $B'\neq 0$, l'équation équivaut à $B'\left(y'+\frac{D'}{B'}\right)^2+2C'x'+E'-\frac{D'^2}{B'^2}=0$. Donc si Ω est le point de coordonnées $\left(0,-\frac{D'}{B'}\right)$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$, l'équation de la courbe dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est de la forme : $B'Y^2+2C'X+F'=0$ avec $B'\neq 0$.

c) <u>Equations réduites</u>

On peut remarquer que l'on peut supposer le coefficient du premier terme positif, et donc toute courbe plane (Γ) du second degré admet une équation de l'un des 4 types :

- $A'X^2+B'Y^2+F'=0$ avec $A'>0$ et $B'>0$.
  - Si $F'>0$, alors $(\Gamma)=\varnothing$.
  - Si $F'=0$, alors $(\Gamma)=\{\Omega\}$.
  - Si $F'<0$, alors la courbe (Γ) admet pour équation réduite $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ en posant $a=\sqrt{-\frac{F'}{A'}}$ et $b=\sqrt{-\frac{F'}{B'}}$. Une telle courbe s'appelle une « **ellipse** ».
- $A'X^2+B'Y^2+F'=0$ avec $A'>0$ et $B'<0$.
  - Si $F'=0$, alors l'équation équivaut à $Y=\pm X\sqrt{-\frac{A'}{B'}}$. Donc la courbe (Γ) est la réunion de deux droites sécantes en Ω.
  - Si $F'<0$, alors la courbe (Γ) admet pour équation réduite $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ en posant $a=\sqrt{-\frac{F'}{A'}}$ et $b=\sqrt{\frac{F'}{B'}}$. Une telle courbe s'appelle une « **hyperbole** ».
  - Si $F'>0$, alors la courbe (Γ) admet pour équation réduite $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=-1$ en posant $a=\sqrt{\frac{F'}{A'}}$ et $b=\sqrt{-\frac{F'}{B'}}$. Une telle courbe est aussi une « **hyperbole** ». On donne le même nom car l'on remarque que changer le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ en $(\Omega,\vec{v},\vec{u})$ intervertit *X* et *Y*, et donc intervertit les deux derniers cas.
- $A'X^2+2D'Y+F'=0$ avec $A'>0$.
  - Si $D'=0$:
    - Si $F'>0$, alors $(\Gamma)=\varnothing$.
    - Si $F'=0$, alors (Γ) est l'axe $(\Omega,\vec{v})$ d'équation $X=0$.
    - Si $F'<0$, alors l'équation équivaut à $X=\pm\sqrt{-\frac{F'}{A'}}$, donc la courbe (Γ) est la réunion de deux droites parallèles à l'axe $(\Omega,\vec{v})$.

- Si $D'\neq 0$, alors l'équation équivaut à $X^2=-\frac{2D'}{A'}\left(Y+\frac{F'}{2D'}\right)$, donc la courbe (Γ) admet pour équation réduite $X^2=2pY$ dans le repère $(\Omega',\vec{u},\vec{v})$ où $p=-\frac{D'}{A'}$ et où Ω' a pour coordonnées $\left(0,-\frac{F'}{2D'}\right)$ dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$. Une telle courbe s'appelle une « **parabole** ».

- $B'Y^2+2C'X+F'=0$ avec $B'>0$. On peut remarquer que si l'on intervertit *X* et *Y*, on retrouve la forme précédente. Donc :
  - Si $C'=0$:
    - Si $F'>0$, alors $(\Gamma)=\varnothing$.
    - Si $F'=0$, alors (Γ) est l'axe $(\Omega,\vec{u})$ d'équation $Y=0$.
    - Si $F'<0$, alors l'équation équivaut à $Y=\pm\sqrt{-\frac{F'}{b'}}$, donc la courbe (Γ) est la réunion de deux droites parallèles à l'axe $(\Omega,\vec{u})$.
  - Si $C'\neq 0$, alors la courbe (Γ) admet pour équation réduite $Y^2=2pX$. Une telle courbe est aussi une « **parabole** ».

<u>Conclusion</u> Toute courbe du second degré non vide est :
- soit réduite à un point.
- soit la réunion de deux droites sécantes.
- soit la réunion de deux droites parallèles, éventuellement confondues.
- soit une <u>ellipse</u> d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (cercle si $a=b$).
- soit une <u>hyperbole</u> d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.
- soit une <u>parabole</u> d'équation réduite $x^2=2py$ ou $y^2=2px$.

2) Etude des courbes

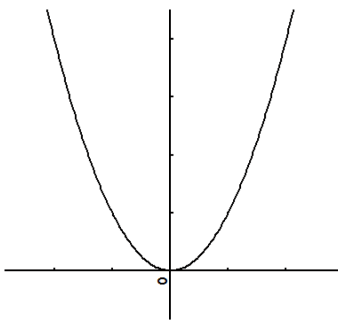
a) Etude de la parabole

On étudie d'abord la parabole d'équation réduite $x^2=2py$ avec $p\neq 0$, qui est la courbe représentative de la fonction *f* définie par : $f(x)=\frac{1}{2p}x^2$.

La fonction est paire. Son sens de variations et ses limites dépendent du signe de *p*.

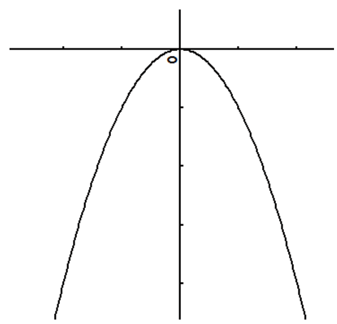
Si $p>0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Si $p<0$:

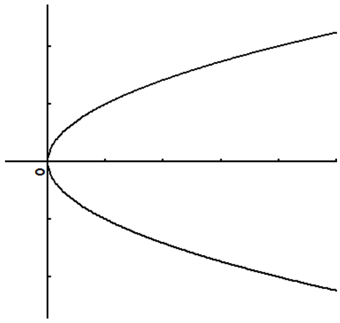
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



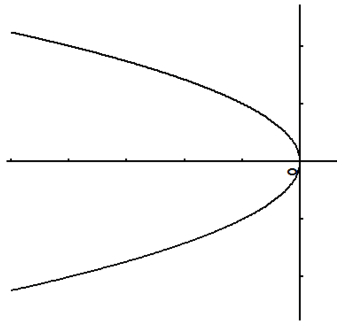
On dira que l'on a une parabole de sommet $O(0,0)$, d'axe d'équation $x=0$, de paramètre *p*.

On en déduit l'étude de la parabole d'équation $y^2=2px$ en inversant les rôles de *x* et *y*.

Si $p > 0$:



Si $p < 0$:



On dira que l'on a une parabole de sommet $O(0,0)$, d'axe d'équation $y = 0$, de paramètre *p*.

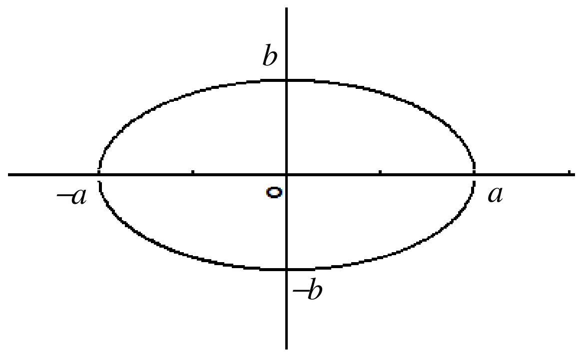
b) Etude de l'ellipse

L'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet un centre de symétrie $O(0,0)$ et deux axes de symétrie d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

On limite donc l'étude au quart de plan $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Cette partie de l'ellipse est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $[0, a]$ par : $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Elle est dérivable sur $[0, a[$ et $f'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \leq 0$.

x	0		a
f'	0	$-$	$\Vert$
f	b	$\searrow$	0



$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^-} \frac{-b}{a}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} = -\infty$.

Donc la tangente en *a* est verticale.
On complète la courbe à l'aide des symétries.

Si $a = b$, on a évidemment le cercle de centre *O* et de rayon *a*.
Si $a \neq b$, on dira que l'on a une ellipse de centre *O*, de sommets $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$, de demi-grand axe *a* si $a > b$, ou *b* si $a < b$.

Remarque : L'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image du cercle $\mathscr{C}$ de centre *O* et de rayon *a* (appelé cercle principal de l'ellipse) par l'affinité orthogonale *f* d'axe $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{b}{a}$. En effet l'équation de ce cercle est $x^2 + y^2 = a^2$, et l'image du point $M(x, y)$ par l'affinité est le point $M'(x', y')$ avec $x' = x$ et $y' = \frac{b}{a} y$.

Or $M' \in f(\mathscr{C})$ si $M \in \mathscr{C}$, donc si $x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2$, donc si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

c) Etude de l'hyperbole

On étudie d'abord l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Elle admet un centre de symétrie $O(0,0)$ et deux axes de symétrie d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

On limite donc l'étude au quart de plan $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Cette partie de l'hyperbole est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $[a,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

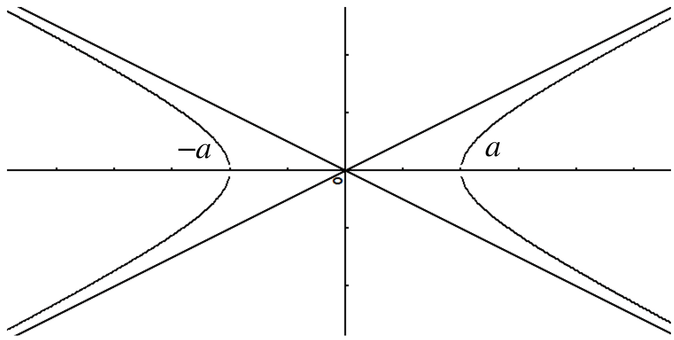
$f(x) = \dfrac{bx}{a}\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}$ si $x > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De plus $f(x) - \dfrac{b}{a}x = \dfrac{bx}{a}\left(\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}} - 1\right) = \dfrac{-ab}{x\left(\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}} + 1\right)}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(x) - \dfrac{b}{a}x\right) = 0^-$.

Donc la courbe admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$ et se trouve en dessous de son asymptote.

La fonction est dérivable sur $]a,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \geq 0$.

x	a	$+\infty$
f'	$\|\|$ +	
f	$0 \nearrow$	$+\infty$



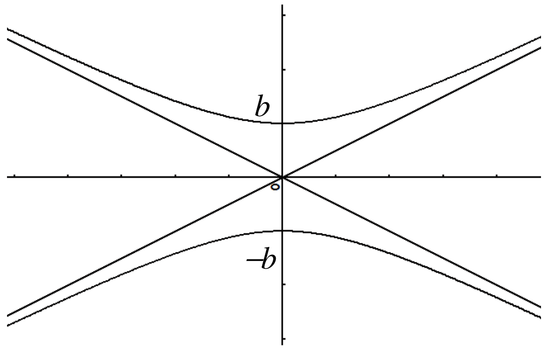
$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}} = +\infty$.

Donc la tangente en *a* est verticale.
On complète la courbe à l'aide des symétries.

La courbe admet deux asymptotes d'équations $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$.

On dira que l'on a une hyperbole de centre O, de sommets $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$.

On en déduit l'étude de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ en inversant les rôles de *x* et de *y* (et donc de *a* et *b*).
On peut remarquer que les équations des asymptotes deviennent $x = \pm\dfrac{a}{b}y$, ce qui équivaut à $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Donc les équations des asymptotes restent les mêmes.



On dira que l'on a une hyperbole de centre O, de sommets $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$.

II - Sections planes d'un cône de révolution

Historiquement, les coniques ont été étudiées dès l'Antiquité en astronomie comme trajectoires de planètes.
Et le mot « conique » vient du mot « cône ».

On appelle conique toute courbe intersection d'un cône de révolution et d'un plan.

Si le plan passe par le sommet, on voit assez facilement que l'intersection est un point, une droite ou deux droites sécantes.
On se propose donc de déterminer toutes les « formes » de sections planes de cônes de révolution dans les autres cas.

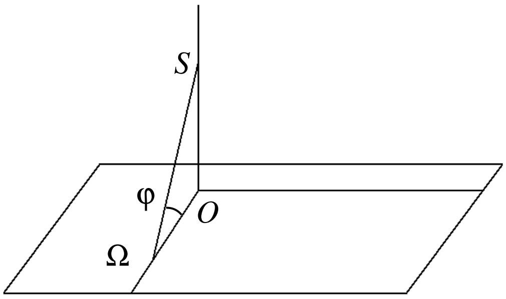
1) <u>Résolution du problème</u>

<u>Rappel</u> : Si S est un point de l'espace, (Δ) une droite, on appelle cône de révolution (C) de sommet S, d'axe (Δ) et d'angle de mesure $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ le solide engendré par la rotation d'une droite (D) passant par S et faisant un angle θ avec (Δ).

Soit (P) un plan faisant un angle de mesure $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec l'axe (Δ) et ne contenant pas le sommet S du cône.

- Supposons d'abord que $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, c'est-à-dire que l'axe (Δ) n'est ni parallèle ni orthogonal à (P). Soit O le projeté orthogonal de S sur (P) et Ω le point d'intersection de (Δ) avec (P). Soit $\vec{i} = \frac{1}{O\Omega}\overrightarrow{O\Omega}$ et $\vec{k} = \frac{1}{OS}\overrightarrow{OS}$.

  On complète pour obtenir un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Donc $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan (P).
  Les coordonnées de S sont donc $(0,0,s)$ et celles de Ω sont $(\omega,0,0)$. L'axe (Δ) fait un angle φ avec (P), donc $\tan\varphi = \frac{s}{\omega}$. Donc $\omega = s\,\mathrm{cotan}\,\varphi$, et donc $S(s\,\mathrm{cotan}\,\varphi, 0, 0)$.



  Un point $M(x,y,z)$ appartient au cône si et seulement si $M = S$ ou si l'angle $(\overrightarrow{S\Omega}, \overrightarrow{SM})$ a pour mesure θ, donc si $\overrightarrow{S\Omega}.\overrightarrow{SM} = S\Omega \times SM \times \cos\theta$, ce qui donne :
  $$xs\,\mathrm{cotan}\,\varphi - s(z-s) = \sqrt{s^2\,\mathrm{cotan}^2\,\varphi + s^2} \times \sqrt{x^2+y^2+(z-s)^2} \times \cos\theta$$
  Donc la conique (Γ) intersection de (C) et de (P) a pour équation (car $z = 0$) :
  $$xs\,\mathrm{cotan}\,\varphi + s^2 = \sqrt{s^2\,\mathrm{cotan}^2\,\varphi + s^2} \times \sqrt{x^2+y^2+s^2} \times \cos\theta$$
  En élevant au carré et en divisant par $s^2 \neq 0$, on obtient l'équation (1) :
  $$x^2(\cos^2\theta - \cos^2\varphi) + y^2\cos^2\theta - 2xs\sin\varphi\cos\theta + s^2(\cos^2\theta - \sin^2\varphi) = 0.$$
- Si $\varphi = 0$, l'axe (Δ) est parallèle au plan (P). On reprend le même raisonnement mais on choisit un point Ω distinct de S sur l'axe (Δ), donc $\Omega(\omega, 0, s)$. Donc un point $M(x,y,z)$ appartient au cône si et seulement si : $x\omega = \omega \times \sqrt{x^2+y^2+(z-s)^2} \times \cos\theta$.
  Donc la conique a pour équation : $x\omega = \omega \times \sqrt{x^2+y^2+s^2} \times \cos\theta$. Or $\omega \neq 0$.
  Ce qui donne : $x^2(\cos^2\theta - 1) + y^2\cos^2\theta + s^2\cos^2\theta$. C'est l'équation (1) pour $\varphi = 0$.
- Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'axe (Δ) est orthogonal au plan (P). On reprend le même raisonnement mais on choisit un point Ω distinct de O dans le plan (P) pour définir $\vec{i}$. L'axe (Δ) est la droite (SO), donc un point $M(x,y,z)$ appartient au cône si et seulement si $\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{SM} = SO \times SM \times \cos\theta$, donc si $-s(z-s) = s \times \sqrt{x^2+y^2+(z-s)^2} \times \cos\theta$.
  Donc la conique a pour équation : $s^2 = s \times \sqrt{x^2+y^2+s^2} \times \cos\theta$. Or $s \neq 0$.

Ce qui donne $x^2\cos^2\theta + y^2\cos^2\theta + s^2(\cos^2\theta - 1) = 0$. C'est l'équation (1) pour $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

<u>Conclusion</u> :
On a démontré que si le plan ne passe pas par le sommet du cône, il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation de la conique (Γ) est un polynôme du second degré en *x* et *y*.

2) <u>Nature de la conique</u>

On a vu que si $S \notin (P)$, il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation est :

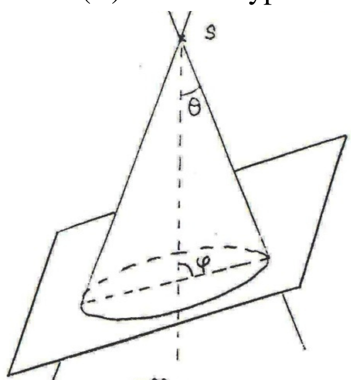
$$x^2(\cos^2\theta - \cos^2\varphi) + y^2\cos^2\theta - 2xs\sin\varphi\cos\theta + s^2(\cos^2\theta - \sin^2\varphi) = 0$$

C'est une courbe du second degré et $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc le coefficient de y^2 est non nul.

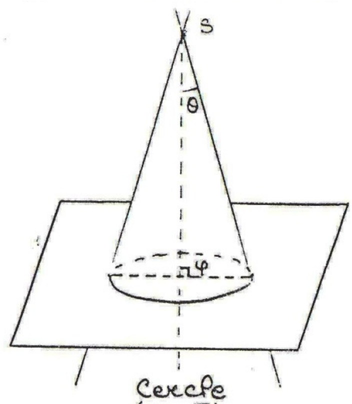
On utilise les résultats de la première partie en comparant les signes des coefficients de x^2 et y^2, ce qui revient à étudier le signe de $(\cos^2\theta - \cos^2\varphi)$, donc à comparer φ et θ.

- Si $S \notin (P)$, il y a trois cas :
  - Si $\varphi = \theta$, alors (Γ) est une parabole car $\cos^2\theta - \cos^2\varphi = 0$.
  - Si $\varphi > \theta$, alors (Γ) est une ellipse car $\cos\varphi < \cos\theta$, donc $\cos^2\theta - \cos^2\varphi > 0$.

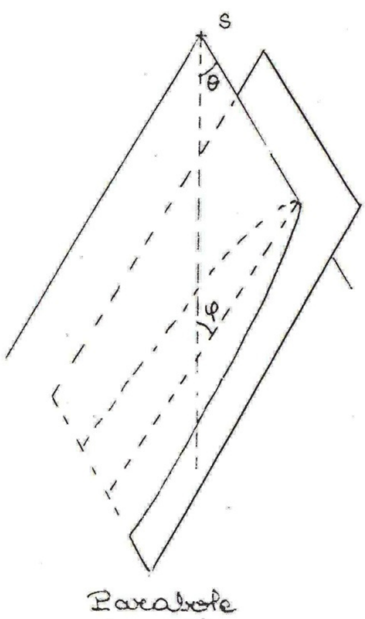
    On aura un cercle si $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ car $\cos^2\theta - \cos^2\varphi = \cos^2\theta$.
  - Si $\varphi < \theta$, alors (Γ) est une hyperbole car $\cos\varphi > \cos\theta$, donc $\cos^2\theta - \cos^2\varphi < 0$.



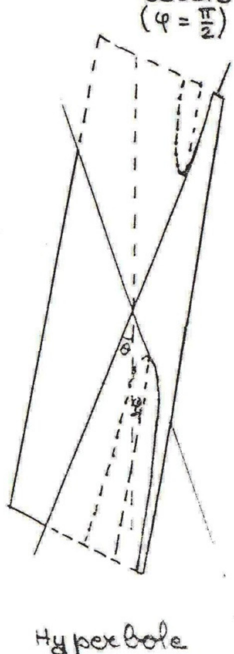
Ellipse
$(\varphi > \theta)$



Cercle
$(\varphi = \frac{\pi}{2})$



Parabole
$(\varphi = \theta)$



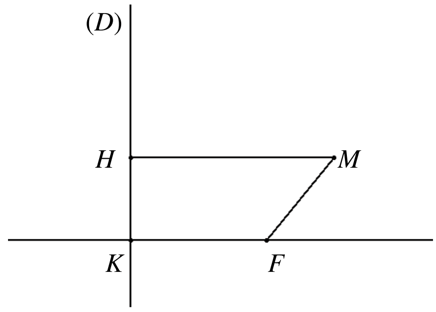
Hyperbole
$(\varphi < \theta)$

- Si $S \in (P)$, il y a trois cas (coniques dégénérées) :
  - Si $\varphi > \theta$, alors $(\Gamma) = \{S\}$.
  - Si $\varphi = \theta$, alors (Γ) est une droite passant par S.
  - Si $\varphi < \theta$, alors (Γ) est la réunion de deux droites sécantes en S.

III - Définition monofocale

Soit (D) une droite du plan, F un point non situé sur (D) et un réel e strictement positif. Il s'agit de trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1) Résolution du problème



Soit K le projeté orthogonal de F sur (D).

Soit $\vec{i} = \dfrac{1}{KF}\overrightarrow{KF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$, donc vecteur directeur de (D).

Dans le repère orthonormé $(K, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) a pour équation $x = 0$ et les coordonnées du point F sont $(\alpha, 0)$.

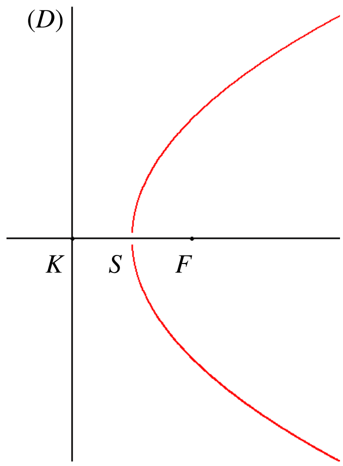
Donc un point $M(x, y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si : $\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = e|x|$, donc si : $(1-e^2)x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$.

On obtient donc une courbe du second degré, qui est une conique non dégénérée car le coefficient de y^2 est non nul.

On peut aussi remarquer que l'on ne peut pas obtenir un cercle car $e \neq 0$, donc $1 - e^2 \neq 1$.

On dira que $\mathscr{E}$ est la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

2) Nature de la conique



- Si $e = 1$, l'équation devient $y^2 = 2\alpha\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

  Soit S le milieu de $[KF]$, donc le point de coordonnées $\left(\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$.

  Si l'on se place dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation est $Y^2 = 2\alpha X$.

  Donc si $e = 1$, l'ensemble $\mathscr{E}$ est une parabole de sommet S milieu de $[KF]$, d'axe (KF), de paramètre $p = KF$ et de concavité vers F.

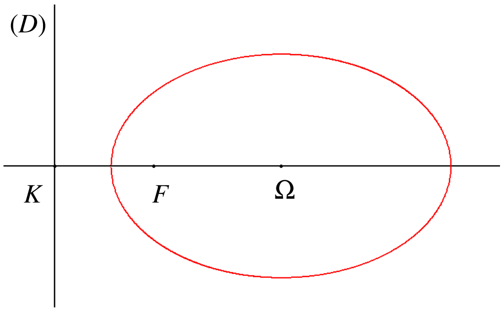
  On se place maintenant dans le cas où $e \neq 1$.

  Alors, l'équation équivaut à : $(1-e^2)\left(x - \dfrac{\alpha}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{\alpha^2 e^2}{1-e^2}$.

  Soit Ω le point de coordonnées $\left(\dfrac{\alpha}{1-e^2}, 0\right)$.

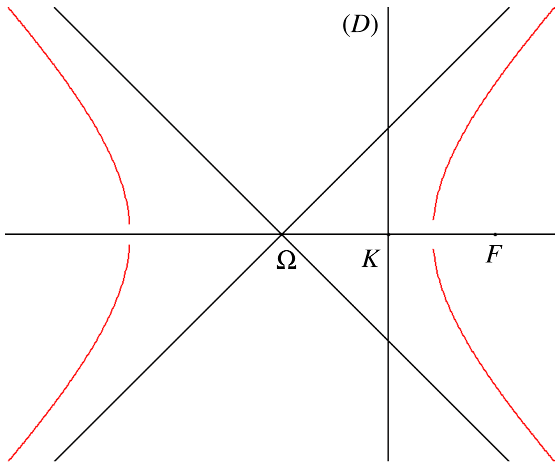
  Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation est : $(1-e^2)X^2 + Y^2 = \dfrac{\alpha^2 e^2}{1-e^2}$

- Si $e<1$, l'équation s'écrit : $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ avec $a=\dfrac{\alpha e}{1-e^2}$ et $b=\dfrac{\alpha e}{\sqrt{1-e^2}}$.
  On peut remarquer que Ω n'appartient pas à la demi-droite $[FK)$ car $\alpha<\dfrac{\alpha}{1-e^2}$. On peut aussi remarquer que $b<a$.



Donc si $e<1$, l'ensemble $\mathscr{E}$ est une ellipse qui n'est pas un cercle, dont le centre est situé sur la droite (FK) en dehors de la demi-droite $[FK)$, dont les axes de symétrie sont (FK) et la droite orthogonale en Ω à (FK). Son grand axe est sur la droite (FK).

- Si $e>1$, l'équation s'écrit : $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ avec $a=\dfrac{\alpha e}{e^2-1}$ et $b=\dfrac{\alpha e}{\sqrt{e^2-1}}$.
  K appartient à $[\Omega F]$ car $\dfrac{\alpha}{1-e^2}<0<\alpha$.



Donc si $e>1$, l'ensemble $\mathscr{E}$ est une hyperbole dont le centre est situé sur la droite (FK) en dehors de la demi-droite $[KF)$, dont les axes de symétrie sont (FK) et la droite orthogonale en Ω à (FK), et dont les sommets sont sur la droite (FK).

3) Réciproque

Il s'agit de savoir si toute conique peut être définie comme une telle ligne de niveau, donc de savoir si toute conique possède un foyer, une directrice et une excentricité. De plus on se pose aussi la question de leur unicité et de leur détermination.
Tout d'abord, en fonction des remarques de l'étude précédente, il faut éliminer les cas des coniques dégénérées et du cercle. Etudions successivement les autres cas.

a) Etude de la parabole

Soit (P) une parabole de sommet S et d'axe (Δ). Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire de (Δ) dirigé vers la concavité de (P) et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$. Donc dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$, l'équation de (P) est : $y^2=2px$.
D'après l'étude faite au 2), si la parabole (P) possède un foyer, une directrice et une excentricité, alors nécessairement :

- l'excentricité est $e=1$ (sinon ce ne serait pas une parabole).
- le foyer se trouve sur l'axe de la parabole dans le « creux » de la courbe.
- la directrice est perpendiculaire à l'axe en un point K tel que S soit le milieu de $[KF]$.
- le paramètre p est la distance KF.

Donc si (F,D,e) existe, il est unique car nécessairement $e=1$, F a pour coordonnées $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ et (D) a pour équation $x=-\dfrac{p}{2}$. Vérifions qu'ils conviennent.

On considère donc la conique $\mathscr{E}$ de foyer $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, de directrice (D) d'équation $x=-\dfrac{p}{2}$ et d'excentricité $e=1$.

Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\dfrac{MF}{MH}=1$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D), donc si : $\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2$.

Donc M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $y^2=2px$. Donc $\mathscr{E}=(P)$.

> Toute parabole possède une unique excentricité $e=1$, un unique foyer F et une unique directrice (D).
>
> Si son équation réduite est $y^2=2px$, son foyer est $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ et sa directrice (D) a pour équation $x=-\dfrac{p}{2}$.
>
> Si son équation réduite est $x^2=2py$, son foyer est $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$ et sa directrice (D) a pour équation $y=-\dfrac{p}{2}$.

Le deuxième cas est obtenu en inversant les rôles de x et y, et donc de a et b.

b) <u>Etude de l'ellipse</u>

Soit (E) une ellipse (qui n'est pas un cercle) de centre Ω. Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire de son axe de symétrie qui porte le grand axe et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$.

Donc dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, l'équation de (E) est : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b$.

D'après l'étude faite au 2), si l'ellipse (E) possède un foyer, une directrice et une excentricité, alors nécessairement :

- l'excentricité est $e<1$ (sinon ce ne serait pas une ellipse).
- le foyer F se trouve sur l'axe de l'ellipse qui porte le grand-axe, à l'intérieur de (E).
- la directrice est perpendiculaire à cet axe en un point K extérieur à l'ellipse mais qui n'appartient pas à la demi-droite $[F\Omega)$.

Donc si (F,D,e) existe, alors nécessairement $e<1$, F a pour coordonnées $(c,0)$ et (D) a pour équation $x=d$ avec $|c|<a$, $|d|>a$, et c et d sont de même signe.

On considère donc la conique $\mathscr{E}$ de foyer $F(c,0)$, de directrice (D) d'équation $x=d$ (avec $cd>0$) et d'excentricité $e<1$. Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\dfrac{MF}{MH}=e$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D), donc si : $(x-c)^2+y^2=e^2(x-d)^2$.

Donc M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $(1-e^2)x^2+y^2-2(c-de^2)x=e^2d^2-c^2$.

Pour que $\mathscr{E}=(E)$, il faut que $c-de^2=0$ car Ω est centre de symétrie de (E).

Alors $e^2d^2-c^2=e^2d^2(1-e^2)$.

Donc M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\dfrac{x^2}{e^2d^2}+\dfrac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)}=1$.

Donc $\mathscr{E}=(E)$ si et seulement si $c-de^2=0$, $a^2=e^2d^2$ et $b^2=e^2d^2(1-e^2)$.

On obtient $1-e^2=\dfrac{b^2}{a^2}$, donc une unique excentricité $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ($0<e<1$).

On obtient ensuite deux couples (c,d) solutions car $d=\pm\dfrac{a}{e}=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ et $c=de^2$.

Toute ellipse qui n'est pas un cercle possède une unique excentricité $e<1$, mais deux couples formés par un foyer et une directrice associée (F,D) et (F',D') qui sont symétriques par rapport à son centre.

Si son équation réduite est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b$, on pose $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Son excentricité est $e=\frac{c}{a}$, ses foyers sont $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$, et les directrices associées sont les droites (*D*) d'équation $x=\frac{a^2}{c}$ et (D') d'équation $x=-\frac{a^2}{c}$.

Si son équation réduite est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a<b$, on pose $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Son excentricité est $e=\frac{c}{b}$, ses foyers sont $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$, et les directrices associées sont les droites (*D*) d'équation $y=\frac{b^2}{c}$ et (D') d'équation $y=-\frac{b^2}{c}$.

Le deuxième cas est obtenu en inversant les rôles de *x* et *y*, et donc de *a* et *b*.
Remarque : Il n'est pas étonnant de trouver deux foyers et deux directrices car, étant données les symétries de la courbe, si un couple (*F*,*D*) convient, son symétrique par rapport au centre de la conique convient aussi.

c) Etude de l'hyperbole

Soit (*H*) une hyperbole de centre Ω. Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire de son axe de symétrie qui contient ses sommets et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$. Donc dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, l'équation de (*H*) est : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

D'après l'étude faite au 2), si l'hyperbole (*H*) possède un foyer, une directrice et une excentricité, alors nécessairement :

- l'excentricité est $e>1$ (sinon ce ne serait pas une hyperbole).
- le foyer *F* se trouve sur l'axe de l'hyperbole qui contient ses sommets.
- la directrice est perpendiculaire à cet axe en un point *K* qui appartient $[\Omega F]$.

Donc si (F,D,e) existe, alors nécessairement $e>1$, *F* a pour coordonnées $(c,0)$ et (*D*) a pour équation $x=d$ avec $|c|>a$, $|d|<a$, et *c* et *d* sont de même signe.

On considère donc la conique $\mathscr{E}$ de foyer $F(c,0)$, de directrice (*D*) d'équation $x=d$ (avec $cd>0$) et d'excentricité $e>1$. Donc un point *M* appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\frac{MF}{MH}=e$ où *H* est le projeté orthogonal de *M* sur (*D*), donc si : $(x-c)^2+y^2=e^2(x-d)^2$.

Donc *M* appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $(e^2-1)x^2-y^2+2(c-de^2)x=c^2-e^2d^2$.

Pour que $\mathscr{E}=(H)$, il faut que $c-de^2=0$ car Ω est centre de symétrie de (*H*).

Alors $c^2-e^2d^2=e^2d^2(e^2-1)$.

Donc *M* appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\frac{x^2}{e^2d^2}-\frac{y^2}{e^2d^2(e^2-1)}=1$.

Donc $\mathscr{E}=(E)$ si et seulement si $c-de^2=0$, $a^2=e^2d^2$ et $b^2=e^2d^2(e^2-1)$.

On obtient $e^2-1=\frac{b^2}{a^2}$, donc une unique excentricité $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ ($e>1$).

On obtient ensuite deux couples (c,d) solutions car $d=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $c=de^2$.

Toute hyperbole possède une unique excentricité $e>1$, mais mais deux couples formés par un foyer et une directrice associée (F,D) et (F',D') qui sont symétriques par rapport à son centre.

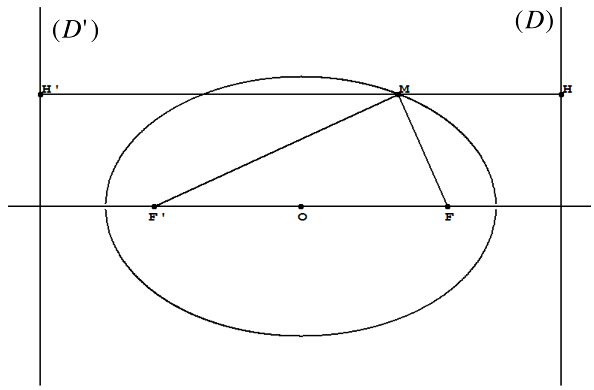
Si son équation réduite est $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, on pose $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Son excentricité est $e=\frac{c}{a}$, ses foyers sont $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$, et les directrices associées sont les droites (D) d'équation $x=\frac{a^2}{c}$ et (D') d'équation $x=-\frac{a^2}{c}$.

Si son équation réduite est $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, on pose $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Son excentricité est $e=\frac{c}{b}$, ses foyers sont $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$, et les directrices associées sont les droites (D) d'équation $y=\frac{b^2}{c}$ et (D') d'équation $y=-\frac{b^2}{c}$.

Le deuxième cas est obtenu en inversant les rôles de *x* et *y*, et donc de *a* et *b*.
Même remarque que pour l'ellipse car on a les mêmes symétries.

III - Définition bifocale

1) Etude de l'ellipse



Soit (*E*) une ellipse qui n'est pas un cercle. Soient *F* et *F'* ses deux foyers, et (*D*) et (*D'*) les directrices associées.
Si *M* est un point de (*E*), il vérifie à la fois $\frac{MF}{MH}=e$ et $\frac{MF'}{MH'}=e$ si *H* et *H'* sont les projetés orthogonaux de *M* respectivement sur (*D*) et (D').
Etant donnée la disposition des foyers et des directrices, on a : $HH'=MH+MH'$.
On a donc $MF+MF'=eHH'$.
Or HH' est la distance entre les deux directrices.

Donc si l'équation de (*E*) est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b$, on a $MF+MF'=\frac{c}{a}\times 2\frac{a^2}{c}=2a$.

Si (E) est une ellipse de foyers *F* et F', et de demi grand axe *a*, tous les points *M* de (*E*) vérifient $MF+MF'=2a$.

Et si l'équation de (*E*) est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a<b$, on a $MF+MF'=\frac{c}{b}\times 2\frac{b^2}{c}=2b$.

<u>Réciproquement</u> : Soient *F* et F' deux points distincts du plan, $c=\frac{1}{2}FF'$ et $a>c$.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points *M* tels que $MF+MF'=2a$.

Soit *O* le milieu de $[FF']$, $\vec{i}=\frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$.

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les coordonnées de *F* sont $(c,0)$ et celles de F' sont $(-c,0)$. Donc un point *M* appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Tout est positif, donc c'est équivalent à l'égalité des carrés :

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2+2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2.$$

Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=2a^2$$

ce qui équivaut à $\begin{cases}2a^2-(x^2+y^2+c^2)\geq 0\\(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=[2a^2-(x^2+y^2+c^2)]^2\end{cases}$

Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $x^2+y^2\leq 2a^2-c^2$ et :

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$, ce qui équivaut à $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$.

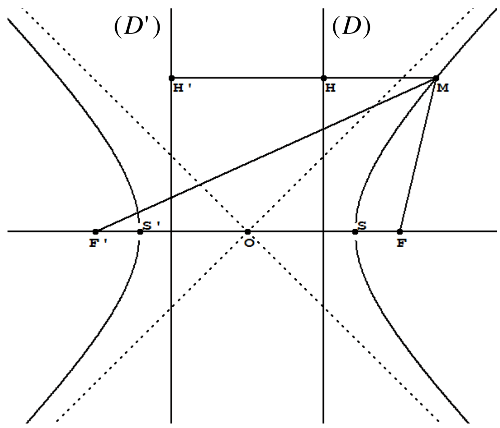
On peut remarquer que si la deuxième condition est vérifiée, alors la première l'est. Eneffet, si $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$, alors $\dfrac{x^2}{a^2}\leq 1$ et $\dfrac{y^2}{a^2-c^2}\leq 1$, donc $x^2+y^2\leq 2a^2-c^2$.

Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

Donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est une ellipse de grand axe porté par la droite (FF') car $a>b$ et de foyers F et F' car $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Si F et F' deux points distincts du plan et si $2a>FF'$, l'ensemble des points M du plan tels que $MF+MF'=2a$ est une ellipse de foyers F et F', et de demi grand axe a.

2) Etude de l'hyperbole



Soit (H) une hyperbole. Soient F et F' ses deux foyers, et (D) et (D') les directrices associées.

Si M est un point de (H), il vérifie à la fois $\dfrac{MF}{MH}=e$ et $\dfrac{MF'}{MH'}=e$ si H et H' sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (D) et (D').

Etant donnée la disposition des foyers et des directrices, on a $HH'=|MH-MH'|$.

On a donc $|MF-MF'|=eHH'$.

Or HH' est la distance entre les deux directrices.

Donc si l'équation de (H) est $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, on a $|MF-MF'|=\dfrac{c}{a}\times 2\dfrac{a^2}{c}=2a$.

Si (H) est une hyperbole de foyers F et F', et de sommets S et S' avec $SS'=2a$, tous les points M de (H) vérifient $|MF-MF'|=2a$.

Si l'équation de (H) est $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$, alors $SS'=2b$ et on a $|MF-MF'|=\dfrac{c}{b}\times 2\dfrac{b^2}{c}=2b$.

<u>Réciproquement</u> : Soient F et F' deux points distincts du plan, $c=\dfrac{1}{2}FF'$ et $a<c$.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $|MF-MF'|=2a$.

Soit O le milieu de $[FF']$, $\vec{i}=\dfrac{1}{c}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$.

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les coordonnées de F sont $(c,0)$ et celles de F' sont $(-c,0)$. Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a.$$

C'est équivalent à l'égalité des carrés :

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2-2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2.$$

Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$x^2+y^2+c^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=2a^2$$

ce qui équivaut à $\begin{cases} x^2+y^2+c^2-2a^2\geq 0 \\ (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=[(x^2+y^2+c^2)-2a^2]^2 \end{cases}$

Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $x^2+y^2\geq 2a^2-c^2$ et :

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$, ce qui équivaut à $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$.

On peut remarquer que si la deuxième condition est vérifiée, alors la première l'est. En effet, si $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=1$, alors $\dfrac{x^2}{a^2}\geq 1$ donc $x^2+y^2\geq x^2\geq a^2\geq 2a^2-c^2$ car $c>a$.

Donc un point M appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est une hyperbole dont les sommets sont sur la droite (FF') et de foyers F et F' car $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

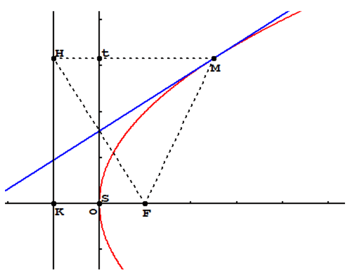
> Si F et F' deux points distincts du plan et si $2a<FF'$, l'ensemble des points M du plan tels que $|MF-MF'|=2a$ est une hyperbole de foyers F et F', de sommets S et S' tels que $SS'=2a$.

IV - Représentations paramétriques des coniques

1) Parabole

Quelle que soit la parabole, il existe un repère orthonormé dans lequel son équation est de la forme : $y^2=2px$.

On choisit comme paramètre t l'ordonnée du point, ce qui signifie que l'on coupe la parabole par une parallèle à son axe de symétrie.



> Une représentation paramétrique de la parabole qui a pour équation réduite $y^2=2px$ est : $M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2p}t^2 \\ y=t \end{cases}$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} x'=\dfrac{1}{p}t \\ y'=1 \end{cases}$. Donc le vecteur $\vec{V}(x',y')$ est non nul quel que soit t.

Donc aucun point n'est stationnaire.

> Une parabole admet une tangente en chacun de ses points.

Un vecteur directeur de la tangente au point $M_0(x_0,y_0)$ de paramètre t a pour coordonnées $\left(\dfrac{t}{p},1\right)$. Une équation est donc : $M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-\dfrac{1}{2p}t^2 & \dfrac{t}{p} \\ y-t & 1 \end{vmatrix}=0$.

Donc $x-\dfrac{t}{p}y+\dfrac{1}{2p}t^2=0$. Donc : $yt=p\left(x+\dfrac{1}{2p}t^2\right)$.

La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ à la parabole d'équation $y^2 = 2px$ a pour équation cartésienne : $yy_0 = p(x + x_0)$.

Le foyer F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et le projeté orthogonal H de M sur la directrice (D) a pour coordonnées $\left(-\frac{p}{2}, t\right)$. Donc $\overrightarrow{FH}.\vec{V} = (-p)\times\frac{t}{p} + t\times 1 = 0$. Donc la tangente en M est orthogonale à (FH). C'est donc la hauteur du triangle FMH. Or $MF = MH$, donc le triangle FMH est isocèle. Donc la hauteur est aussi médiatrice et bissectrice.

Si M est un point d'une parabole de foyer F et de directrice (D), la tangente en M à la parabole est médiatrice du segment $[FH]$ et bissectrice intérieure de l'angle $F\hat{M}H$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

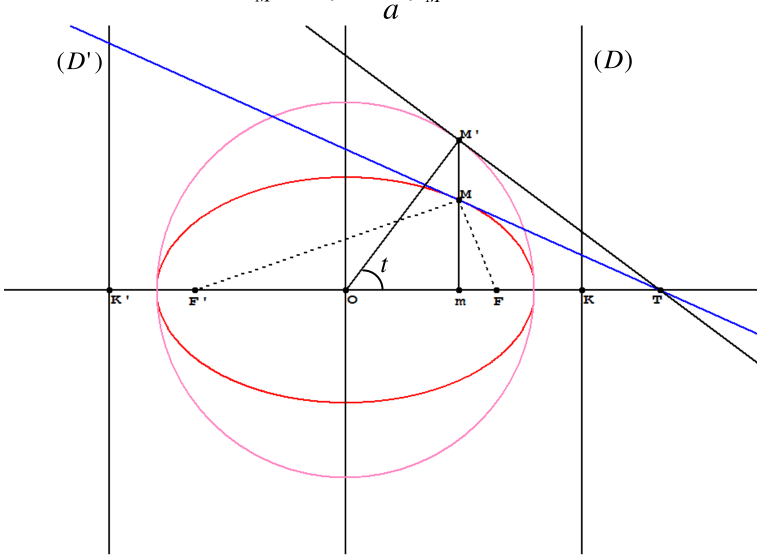
<u>Remarque</u> : Si l'équation réduite est $x^2 = 2py$, il est inutile d'introduire une représentation paramétrique : $M(x, y) \in (C) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2p}t^2 \end{cases}$ car le paramètre est x ! L'équation de la tangente est alors : $xx_0 = p(y + y_0)$.

2) Ellipse

Quelle que soit l'ellipse, il existe un repère orthonormé dans lequel son équation est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'ellipse est image de son cercle principal $\mathscr{C}(O, a)$ par l'affinité orthogonale f d'axe $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{b}{a}$.

Un point M appartient à l'ellipse si et seulement si le point $M' = f^{-1}(M)$ appartient au cercle $\mathscr{C}(O, a)$, donc si et seulement si : $\exists t \in \mathbb{R}\ \begin{cases} x_{M'} = a\cos t \\ y_{M'} = a\sin t \end{cases}$ où t est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$. Or : $x = x_{M'}$ et $y = \frac{b}{a}y_{M'}$.



Une représentation paramétrique de l'ellipse qui a pour équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est : $M(x, y) \in (C) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Il faut bien remarquer la signification du paramètre qui est une mesure de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{OM'})$, et non pas $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x'=-a\sin t \\ y'=b\cos t \end{cases}$. Or $\cos^2 t+\sin^2 t=1$. Donc x' et y' ne peuvent pas être simultanément nuls. Donc le vecteur $\vec{V}(x',y')$ est non nul quel que soit *t*.

Donc aucun point n'est stationnaire.

Une ellipse admet une tangente en chacun de ses points.

Un vecteur directeur de la tangente au point $M_0(x_0,y_0)$ de paramètre *t* a pour coordonnées $(-a\sin t, b\cos t)$.

Une équation est donc : $M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a\cos t & -a\sin t \\ y-b\sin t & b\cos t\end{vmatrix}=0$.

Donc $bx\cos t++ay\sin t-ab=0$. Donc : $\dfrac{x\cos t}{a}+\dfrac{y\sin t}{b}=1$.

La tangente en $M_0(x_0,y_0)$ à l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ a pour équation cartésienne : $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$.

La tangente en *M* à l'ellipse est l'image par l'affinité *f* de la tangente en M' au cercle $\mathscr{C}(O,a)$. Donc ces deux tangentes coupent l'axe (FF') au même point *T*, ce qui permet une construction géométrique de la tangente en *M* à l'ellipse.

De plus, on a vu que tout point *M* de l'ellipse (donc pour tout *t*), on a : $MF+MF'=2a$.

Donc la fonction $\varphi\ :\ t\mapsto MF+MF'$ est constante, donc a une dérivée nulle.

Donc pour tout *t* : $\dfrac{d(MF)}{dt}+\dfrac{d(MF')}{dt}=0$. On note toujours $\vec{V}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.

Or $MF^2=\overrightarrow{MF}.\overrightarrow{MF}$, donc $2MF\times\dfrac{d(MF)}{dt}=2\overrightarrow{MF}.\dfrac{d(\overrightarrow{MF})}{dt}=-2\overrightarrow{MF}.\vec{V}$.

Donc $\dfrac{d(MF)}{dt}=-\dfrac{1}{MF}\overrightarrow{MF}.\vec{V}=-\vec{u}.\vec{V}$ ($\vec{u}$ vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{MF}$ de même sens).

De même $\dfrac{d(MF')}{dt}=-\vec{v}.\vec{V}$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{MF'}$ et de même sens.

Donc $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{V}=0$. Donc la tangente en *M* est orthogonale à la droite passant par *M* et de vecteur directeur $\vec{u}+\vec{v}$, c'est-à-dire la bissectrice intérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.

Si *M* est un point d'une ellipse de foyers *F* et F', la tangente en *M* à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.

3) Hyperbole

Quelle que soit l'hyperbole, il existe un repère orthonormé dans lequel son équation est de la forme : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

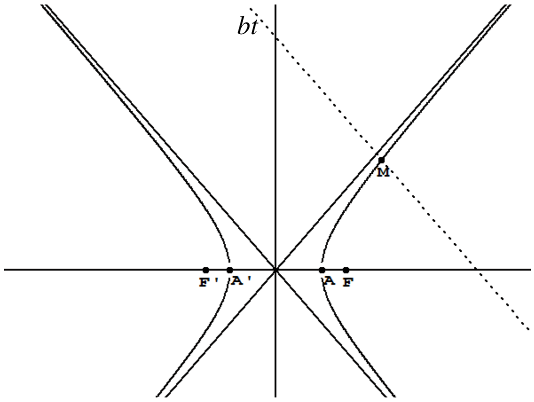
a) Premier paramétrage

Un point $M(x,y)$ appartient à l'hyperbole si et seulement si $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=1$.

Donc $M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow\exists\, t\in\mathbb{R}^*$ $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=t\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{t}\end{cases}$

Une représentation paramétrique de l'hyperbole qui a pour équation réduite $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ est : $M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}^*\ \begin{cases} x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\ y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{cases}$.

On peut remarquer que l'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ est l'équation d'une asymptote à l'hyperbole.
En posant $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t$, on coupe donc l'hyperbole par une parallèle à cette asymptote et bt est l'ordonnée à l'origine de cette parallèle.



Alors $\forall t\in\mathbb{R}^*\quad x'=\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$ et $y'=\frac{b}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $y'\neq 0$.

Donc le vecteur $\vec{V}(x',y')$ est non nul quel que soit t. Donc aucun point n'est stationnaire.

Une hyperbole admet une tangente en chacun de ses points.

Un vecteur directeur de la tangente au point $M_0(x_0,y_0)$ de paramètre t a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2}\left[1-\frac{1}{t^2}\right],\frac{b}{2}\left[1+\frac{1}{t^2}\right]\right)$.

Une équation est donc : $M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) & \frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\\ y-\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) & \frac{b}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\end{vmatrix}=0$.

Donc $M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow \frac{b}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)x-\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)y-\frac{ab}{t}=0$

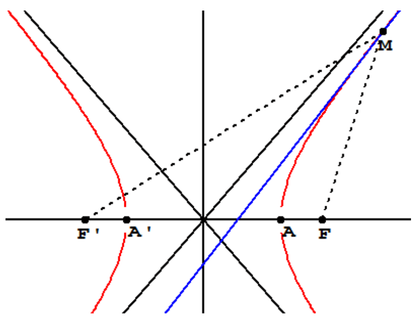
Donc $M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow \frac{1}{2a}\left(t+\frac{1}{t}\right)x-\frac{1}{2b}\left(t-\frac{1}{t}\right)y=1$

La tangente en $M_0(x_0,y_0)$ à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a pour équation cartésienne : $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Tout point M de l'hyperbole vérifie : $|MF-MF'|=2a$. Plus précisément, sur l'une des branches, on a $MF-MF'=2a$ et sur l'autre branche, on a $MF-MF'=-2a$.
Donc la fonction $\varphi\ :\ t\mapsto MF-MF'$ est constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, donc sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$.
Avec les mêmes notations que pour l'ellipse, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MF'}$ de même sens et si $\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$,

on a : $\frac{d(MF)}{dt}=-\vec{u}.\vec{V}$ et $\frac{d(MF')}{dt}=-\vec{v}.\vec{V}$.

Donc $(\vec{u}-\vec{v}).\vec{V}=0$.



Donc la tangente en M à l'hyperbole est orthogonale à la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}-\vec{v}$, c'est-à dire la bissectrice extérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.

Si M est un point d'une hyperbole de foyers F et F', la tangente en M à l'hyperbole est la bissectrice intérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.

b) <u>Deuxième paramétrage</u>

Un point $M(x,y)$ appartient à l'hyperbole si et seulement si $\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{y^2}{b^2}$.

Or, pour tout réel *m*, il existe un unique réel $t_1\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $m=\tan t_1$ et un unique réel $t_2\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$ tel que $m=\tan t_2$. On peut remarquer que $\cos t_1>0$ et $\cos t_2<0$. De plus : $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$.

Donc, si on pose $\tan t=\dfrac{y}{b}$ (qui a deux solutions t_1 et t_2 dont les cosinus sont de signes opposés), on a $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ et une seule des deux solutions donnera $\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\cos t}$.

<u>Théorème</u> : Une représentation paramétrique de l'hyperbole qui a pour équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est : $M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow\exists\, t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[\quad\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos t}\\ y=b\tan t\end{cases}$.

Ici, le paramètre *t* est une mesure de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{OM'})$ où M' est le projeté orthogonal de *M* sur la droite d'équation $x=b$.
L'expression de la représentation paramétrique est plus simple, mais l'avantage du premier paramétrage est d'être rationnel.

c) <u>Troisième paramétrage</u>

Un point $M(x,y)$ appartient à l'hyperbole si et seulement si $\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{y^2}{b^2}$.

La fonction Sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc pour tout réel *m*, il existe un unique réel *t* tel que $\operatorname{Sh} t=m$. Et de plus : $1+\operatorname{Sh}^2 t=\operatorname{Ch}^2 t$.

Donc si on pose $\operatorname{Sh} t=\dfrac{y}{b}$, on obtient : $\dfrac{x^2}{a^2}=\operatorname{Ch}^2 t$, donc $\dfrac{x}{a}=\pm\operatorname{Ch} t$.

Les deux branches de l'hyperbole se trouvent l'une (C^+) dans le demi-plan $x>0$ et l'autre (C^-) dans le demi-plan $x<0$.

<u>Théorème</u> : Chacune des deux branches de l'hyperbole qui a pour équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ admet une représentation paramétrique : $M(x,y)\in(C^+)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x=a\operatorname{Ch} t\\ y=b\operatorname{Sh} t\end{cases}$ et $M(x,y)\in(C^-)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\ \begin{cases}x=-a\operatorname{Ch} t\\ y=b\operatorname{Sh} t\end{cases}$

L'inconvénient est la séparation en deux branches qui n'admettent pas le même paramétrage. Mais la similitude avec le paramétrage de l'ellipse est à remarquer.

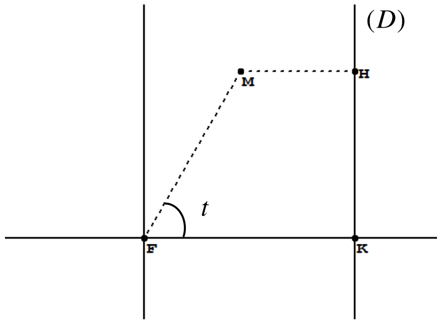
4) <u>Représentation polaire des coniques</u>

La représentation polaire des coniques utilise la définition monofocale, donc va être commune aux trois types de coniques.
On considère une conique de foyer *F*, de directrice associée (*D*) et d'excentricité *e*.

Soit K le projeté orthogonal de F sur (D), et d la distance de F à (D). On se place dans un repère orthonormé $(F, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{d}\overrightarrow{FK}$.

Si l'on pose $MF = r$ et $t = (\vec{i}, \overrightarrow{FM})$, alors $MH = d - r\cos t$.

Donc $MF = eMH \Leftrightarrow r = \dfrac{ed}{1 + e\cos t}$.



On définit le paramètre p de la conique : $p = ed$.

<u>Théorème</u> : Une représentation polaire de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e est : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos t}$.

On peut remarquer que :

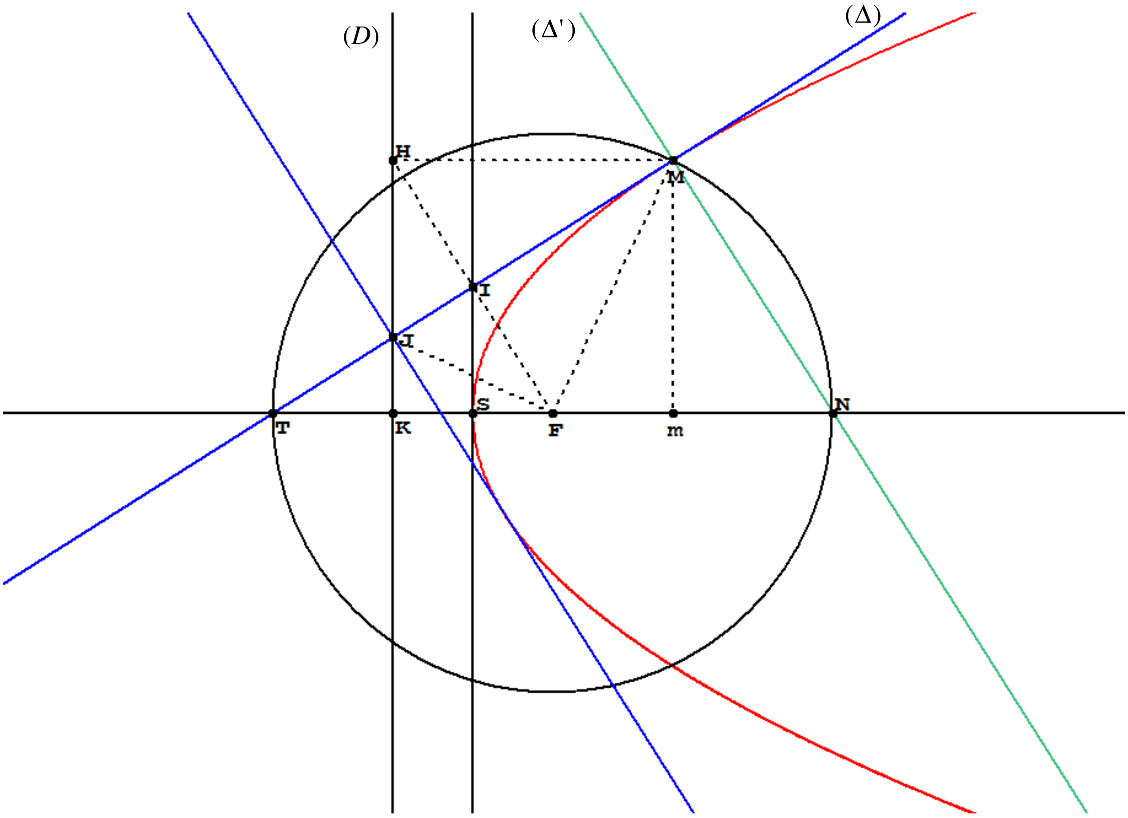
- si $e = 1$ (parabole), r est défini si $t \neq \pi \quad (2\pi)$.
- si $e > 1$ (hyperbole), r est défini si $t \neq \pm t_0 \quad (2\pi)$ où t_0 est solution de $\cos t = -\frac{1}{e}$.
- si $e < 1$ (ellipse), r est défini pour tout t.

V - Récapitulatif et propriétés complémentaires

Les propriétés peuvent être démontrées soit géométriquement, soit à l'aide de la représentation paramétrique.

1) Parabole

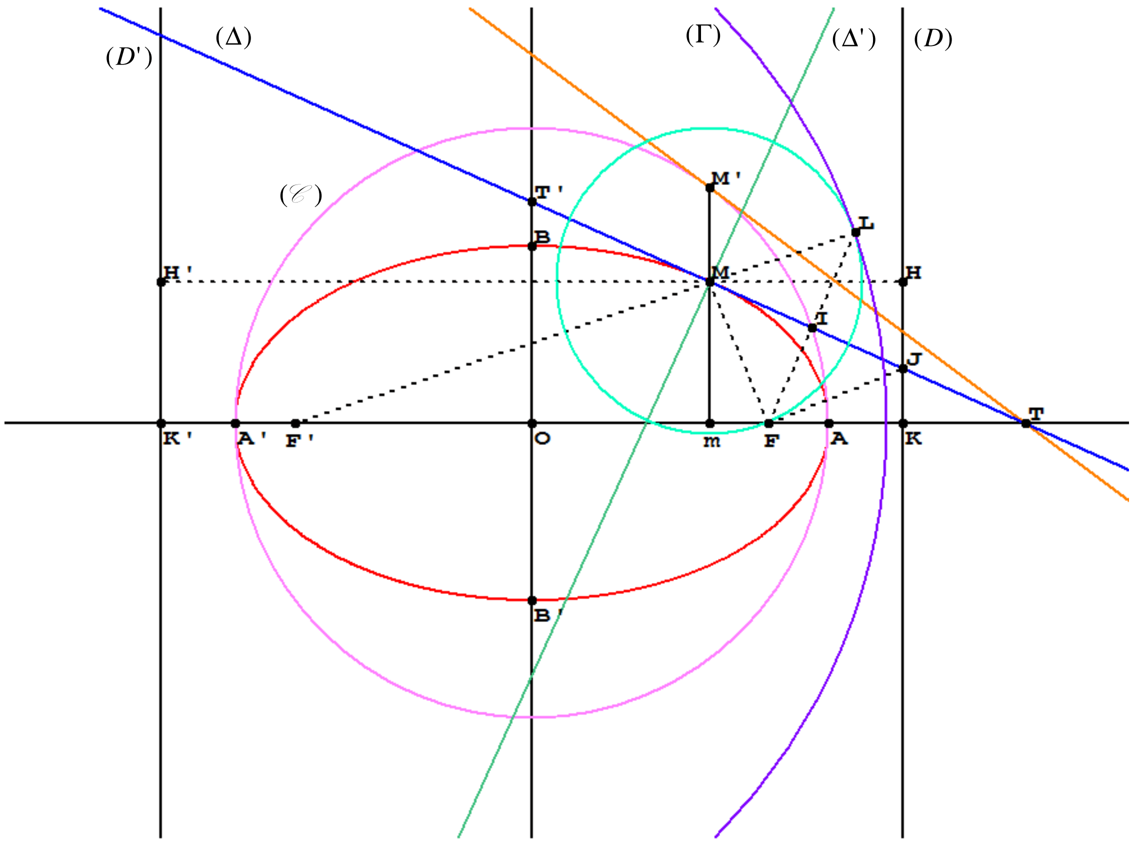
Soit M un point d'une parabole de foyer F, de directrice (D), de sommet S. Soient H et m ses projetés orthogonaux sur (D) et sur son axe (FS). On trace la tangente (Δ) et la normale (Δ') en M à la parabole. Elles coupent l'axe (FS) respectivement en T et N. Soit I le point d'intersection de (FH) avec la tangente au sommet.



1. $MF = MH$ (donc le triangle FMH est isocèle).
2. Le cercle de centre M passant par F est tangent à (D). Plus précisément, le lieu des centres des cercles passant par un point F et tangents à une droite (D) est la parabole de foyer F et de directrice (D) si F n'appartient pas à (D).
3. I est milieu de $[FH]$ car S est milieu de $[KF]$ (théorème de Thalès).
4. La tangente (Δ) en M à la parabole est médiatrice de $[FH]$ et bissectrice intérieure de l'angle $F\hat{M}H$. Elle passe par le milieu I de $[FH]$.
5. La normale (Δ') en M à la parabole est bissectrice extérieure de l'angle $F\hat{M}H$.
6. Le cercle de centre F qui passe par M a pour diamètre $[NT]$, donc F est milieu de $[NT]$.
7. Le triangle MFJ est rectangle en F si J est l'intersection de la tangente (Δ) et de la directrice (D)..
8. La perpendiculaire en J à la tangente (Δ) est aussi tangente à la parabole. Plus précisément, la directrice est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole qui soient orthogonales.
9. La sous-normale $[mN]$ a une longueur fixe égale au paramètre $p = FK$.
10. La sous-tangente $[mT]$ a un milieu fixe, le sommet S de la parabole.

2) Ellipse

Soit M un point d'une ellipse de centre O, de foyers F et F', de directrices (D) et (D'), d'excentricité e, et de sommets A, A', B et B'. Soient H et H' ses projetés orthogonaux sur (D) et (D'). Soit $a = OA$, $b = OB$ et $c = OF$, donc $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

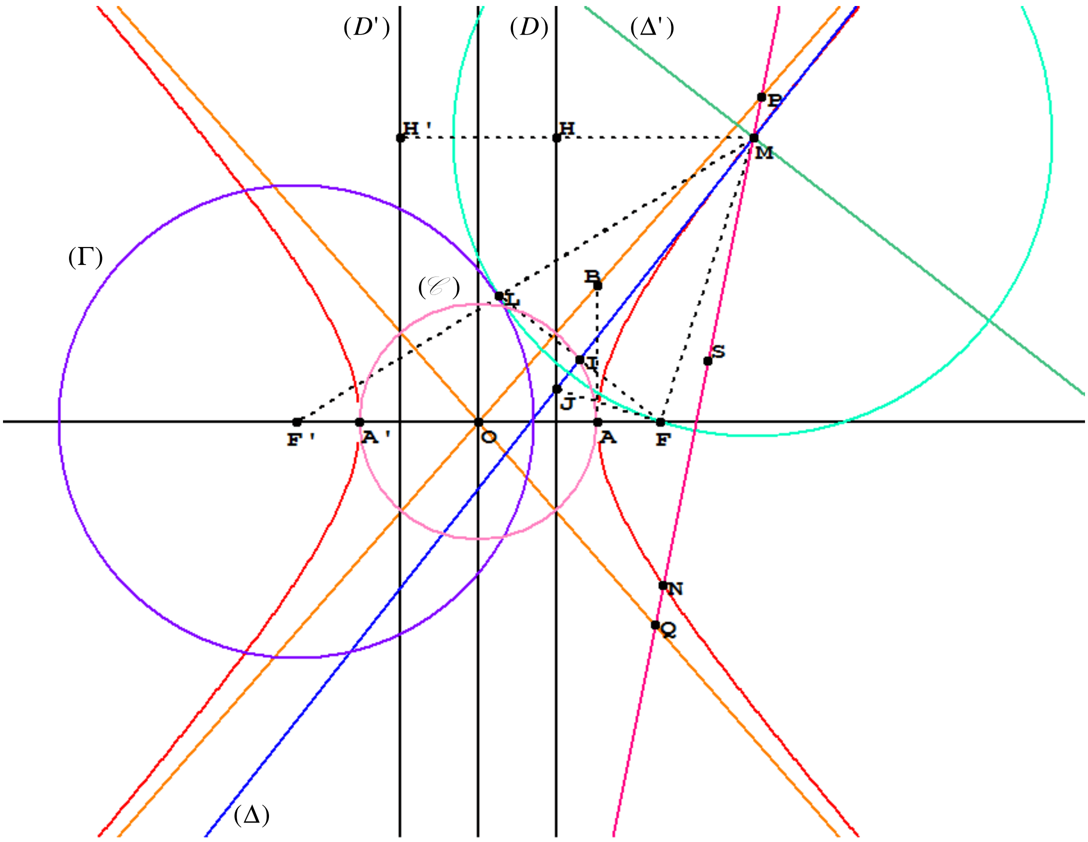


1. $MF = eMH$ et $MF' = eMH'$.
2. $MF + MF' = 2a$ (Méthode « du jardinier » pour construire une ellipse).
3. $BF = BF' = OA$ car $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
4. Le point M est l'image du point M' du cercle principal $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon a par l'affinité orthogonale d'axe (FF') et de rapport $\frac{b}{a}$.

5. La tangente (Δ) en M à l'ellipse et la tangente en M' au cercle $\mathscr{C}$ se coupent en un point T de l'axe (FF').
6. La tangente (Δ) en M à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.
7. La normale (Δ') en M à l'ellipse est la bissectrice intérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.
8. Le cercle de centre M passant par F est tangent en L au cercle directeur (Γ) de centre F' et de rayon $2a$. Plus précisément, le lieu des centres des cercles tangents à un cercle (C) de centre F' et passant par un point F est une ellipse de foyers F et F' si F est intérieur au cercle (C).
9. La tangente (Δ) en M à l'ellipse est médiatrice du segment $[FL]$.
10. Le projeté orthogonal I de F sur la tangente (Δ) appartient au cercle principal $\mathscr{C}$.
11. Le triangle MFJ est rectangle en F si J est l'intersection de la tangente (Δ) et de la directrice (D).
12. Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à l'ellipse qui soient orthogonales est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.
13. La parallèle en M à la droite $(M'T)$ coupe les axes (AA') et (BB') aux points U et V tels que $MU=b$ et $MV=a$ (Méthode « de la bande de papier » pour construire une ellipse).

3) Hyperbole

Soit M un point d'une hyperbole de centre O, de foyers F et F', de directrices (D) et (D'), d'excentricité e, de sommets A et A', et d'asymptotes (d) et (d'). Soient H et H' ses projetés orthogonaux sur (D) et (D'). Soit $a=OA$, $c=OF$ et $b=\sqrt{c^2-a^2}$.



1. $MF=eMH$ et $MF'=eMH'$.
2. $|MF-MF'|=2a$.
3. $OB=OF$ si B est le point d'intersection de l'asymptote (d) avec la tangente au sommet A.
4. La tangente (Δ) en M à l'hyperbole est la bissectrice intérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.

5. La normale (Δ') en M à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $F\hat{M}F'$.
6. Le cercle de centre M passant par F est tangent en L au cercle directeur (Γ) de centre F' et de rayon $2a$. Plus précisément, le lieu des centres des cercles tangents à un cercle (C) de centre F' et passant par un point F est une hyperbole de foyers F et F' si F est extérieur au cercle (C).
7. La tangente (Δ) en M à l'hyperbole est médiatrice du segment $[FL]$.
8. Le projeté orthogonal I de F sur la tangente (Δ) appartient au cercle principal $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon a.
9. Les projetés orthogonaux de F sur les asymptotes appartiennent au cercle principal $\mathscr{C}$.
10. Les symétriques de F par rapport aux asymptotes appartiennent au cercle directeur (Γ).
11. Le triangle MFJ est rectangle en F si J est l'intersection de la tangente (Δ) et de la directrice (D).
12. Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à l'hyperbole qui soient orthogonales est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$ si $a > b$, $\{O\}$ si $a = b$ et $\varnothing$ si $a < b$.
13. Si une droite passant par M et non parallèle aux asymptotes coupe l'hyperbole en un deuxième point N et les asymptotes en deux points P et Q, alors les segments $[MN]$ et $[PQ]$ ont le même milieu S. En particulier, la tangente (Δ) en M à l'hyperbole coupe les asymptotes en deux points symétriques par rapport à M.