BARYCENTRES

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine réel et E l'espace vectoriel associé.

I - Fonction vectorielle de Leibniz

1) Définitions

Un point pondéré de $\mathscr{E}$ est un couple (A,α) formé d'un point A de $\mathscr{E}$ et d'un réel α.

Par exemple pour une particule, on peut considérer sa position A et sa masse α.
Lorsque l'on a n points pondérés, on parlera de « système » $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le n}$.

Etant donné un système $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le n}$ de n points pondérés de $\mathscr{E}$, on appelle fonction vectorielle de Leibniz associée l'application $\vec{F}$ de $\mathscr{E}$ dans E qui à tout point M de $\mathscr{E}$ associe le vecteur $\vec{F}(M)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k}$.

Exemple : Si le système de points pondérés est $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, la fonction vectorielle de Leibniz associe à tout point M le vecteur $\vec{F}(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$.

2) Propriétés de la fonction vectorielle de Leibniz

Etudions d'abord l'injectivité de cette application.
Donc comparons $\vec{F}(M)$ et $\vec{F}(N)$ pour deux points quelconques M et N de $\mathscr{E}$:

$$\vec{F}(M)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA_k})=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MN}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{NA_k}$$

Donc $\boxed{\forall(M,N)\in\mathscr{E}^2\quad \vec{F}(M)=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\overrightarrow{MN}+\vec{F}(N)}$

- Si $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=0$, alors $\forall(M,N)\in\mathscr{E}\quad \vec{F}(M)=\vec{F}(N)$.

Si la somme des coefficients des points pondérés est nulle, alors la fonction vectorielle de Leibniz associée est constante sur $\mathscr{E}$.

Exemple : Si le système de points pondérés est $\{(A,1),(B,-1)\}$, la fonction vectorielle associe à tout point M le vecteur $\vec{F}(M)=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$.

- Supposons maintenant que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\neq 0$. Alors $\vec{F}(M)=\vec{F}(N)$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$, donc si $M=N$. Donc l'application $\vec{F}$ est injective.

Etudions sa surjectivité. Pour cela, fixons un point O de $\mathscr{E}$.
Pour tout vecteur $\vec{V}$ de E, on a $\vec{F}(M)=\vec{V}$ si et seulement si $\vec{V}=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\overrightarrow{MO}+\vec{F}(O)$,

donc si $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}(\vec{F}(O)-\vec{V})$. Donc il existe un unique point M tel que $\vec{F}(M)=\vec{V}$.

Donc l'application $\vec{F}$ est surjective.

Si la somme des coefficients des points pondérés est non nulle, alors la fonction vectorielle de Leibniz associée est bijective de $\mathscr{E}$ dans E.

Exemple : Si le système de points pondérés est $\{(A,1),(B,1)\}$, la fonction vectorielle associe à tout point M le vecteur $\vec{F}(M)=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}$.

3) Barycentre

En particulier si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\vec{F}(G) = \vec{0}$.

Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, on appelle barycentre du système de points pondérés $(A_k, \alpha_k)_{1\le k\le n}$ l'unique point G de $\mathscr{E}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$.

Exemple : Si le système de points pondérés est $\{(A,1),(B,1)\}$, le barycentre est le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, c'est-à-dire le milieu de $[AB]$.

On appelle isobarycentre des points A_1, ..., A_n le barycentre du système de points pondérés $(A_k, 1)_{1\le k\le n}$.

Exemple : L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

II - Propriétés du barycentre

1) Propriété caractéristique

Soit $(A_k, \alpha_k)_{1\le k\le n}$ un système de points pondérés tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ et G son barycentre.

On a vu que : $\forall (M,N) \in \mathscr{E}^2 \quad \vec{F}(M) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\overrightarrow{MN} + \vec{F}(N)$

En particulier : $\forall M \in \mathscr{E} \quad \vec{F}(M) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\overrightarrow{MG} + \vec{F}(G)$. Or $\vec{F}(G) = \vec{0}$.

Donc $\boxed{\forall M \in \mathscr{E} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\overrightarrow{MG}}$

C'est une propriété caractéristique car réciproquement, s'il existe un point M et un point K tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\overrightarrow{MK}$, alors $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\overrightarrow{MK} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\overrightarrow{MG}$, donc $K = G$.

2) Coordonnées du barycentre

Soit $(A_k, \alpha_k)_{1\le k\le n}$ un système de points pondérés tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ et G son barycentre.

Si O est un point de l'espace $\mathscr{E}$, on a vu que : $\forall M \in \mathscr{E} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$.

- Donc, si $\dim \mathscr{E} = 2$ et si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de $\mathscr{E}$, le point G a pour coordonnées :

  $x_G = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ et $y_G = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ si les points A_k ont pour coordonnées (x_k, y_k).

- Et si $\dim \mathscr{E} = 3$ et si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de $\mathscr{E}$, le point G a pour coordonnées :

  $x_G = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$, $y_G = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ et $z_G = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$ si les points A_k ont pour coordonnées (x_k, y_k, z_k).

3) Autres propriétés

Commutativité : On ne change pas le barycentre de n points pondérés en changeant l'ordre de ces points.

Evident car l'addition est commutative dans E.

Homogénéité : On ne change pas le barycentre de n points pondérés en multipliant tous les coefficients par un même réel non nul.

En effet, si G est barycentre du système $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le n}$ avec $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$ et si $\lambda \neq 0$, alors $\sum_{k=1}^{n}\lambda\alpha_k = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right) \neq 0$ et :

$$\forall M \in \mathscr{E} \quad \sum_{k=1}^{n}\lambda\alpha_k\overrightarrow{MA_k} = \lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k} = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\overrightarrow{MG} = \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda\alpha_k\right)\overrightarrow{MG}.$$

Donc G est aussi barycentre du système $(A_k,\lambda\alpha_k)_{1\le k\le n}$.

Remarque : On peut utiliser cette propriété pour simplifier les coefficients du système.

Exemple : Le barycentre de $\{(A,2),(B,6)\}$ est aussi le barycentre de $\{(A,1),(B,3)\}$.

Conséquence : G est isobarycentre des points A_1, ..., A_n si et seulement si il est barycentre des points A_1, ..., A_n affectés des mêmes coefficients non nuls.

Associativité : On ne change pas le barycentre de n points pondérés en remplaçant plusieurs de ces points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients si cette somme est non nulle.

En effet, soit G le barycentre du système $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le n}$ avec $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$, et soit un entier $p \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k \neq 0$. Donc le barycentre K de $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le p}$ existe.

On a : $\forall M \in \mathscr{E} \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k} = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\overrightarrow{MA_k} + \sum_{k=p+1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k}$.

Or : $\forall M \in \mathscr{E} \quad \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\overrightarrow{MA_k} = \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\right)\overrightarrow{MK}$ et $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k} = \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\overrightarrow{MG}$.

Donc $\forall M \in \mathscr{E} \quad \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\overrightarrow{MG} = \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\right)\overrightarrow{MK} + \sum_{k=p+1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k}$.

Donc G est barycentre des points pondérés $\left(K,\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\right)$, (A_{p+1},α_{p+1}), ..., (A_n,α_n).

Remarque : On peut utiliser cette propriété pour grouper des points, ou au contraire pour dissocier des points comme dans les applications qui vont suivre.

III - Exemples d'applications géométriques

1) Barycentre de deux points

Si A et B sont deux points distincts, quels que soient les réels α et β tels que $\alpha+\beta \neq 0$, le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ appartient à la droite (AB). Il appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $\alpha\beta \ge 0$.

En effet : $\forall M \in \mathscr{E} \quad \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$, donc en particulier : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

Il appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $0 \leq \frac{\beta}{\alpha+\beta} \leq 1$, donc si $\frac{\beta}{\alpha+\beta} \geq 0$ et $1-\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \geq 0$, dons si α et β sont de même signe.

Réciproquement, pour tout point M de la droite (AB), il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, donc tel que $(1-\lambda)\overrightarrow{MA}+\lambda\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, donc M est barycentre de $\{(A,1-\lambda),(B,\lambda)\}$ (la somme des coefficients est 1, donc non nulle).

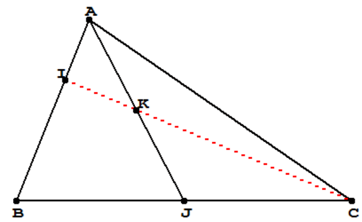
> Si A et B sont deux points distincts, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(A,1-\lambda)$ et (B,λ) lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, et le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(A,1-\lambda)$ et (B,λ) lorsque λ décrit $[0,1]$.

Etant donnée la propriété d'homogénéité, la droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres des points A et B.

2) Méthode pour démontrer un alignement

Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit donc de démontrer que l'un d'entre eux est barycentre des deux autres.

> Exemple 1 : Soit ABC un triangle, I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, J le milieu du segment $[BC]$ et K le milieu du segment $[AJ]$.
> Démontrer que les points C, K et I sont alignés.



K est milieu de $[AJ]$, donc K est barycentre de $(A,1)$ et $(J,1)$, donc de $(A,2)$ et $(J,2)$ d'après la propriété d'homogénéité.

Or J est milieu de $[BC]$, donc J est barycentre de $(B,1)$ et $(C,1)$.

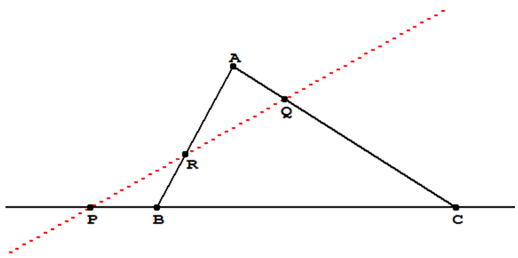
Donc d'après la propriété d'associativité, K est barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.

Or $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, donc I est barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$.

Donc toujours d'après la propriété d'associativité, K est barycentre de $(I,3)$ et $(C,1)$.

Donc les points C, K et I sont alignés.

> Exemple 2 (Théorème de Ménélaüs) :
> Soit ABC un triangle, P, Q et R trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) et distincts des points A, B et C.
> Démontrer que les points P, Q et R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.



Il s'agit des mesures algébriques sur chacune des droites que l'oriente arbitrairement : $\overline{PB}$ et $\overline{PC}$ sur la droite (BC), $\overline{QC}$ et $\overline{QA}$ sur la droite (AC), et $\overline{RA}$ et $\overline{RB}$ sur la droite (BC). Le choix de l'orientation des droites n'a pas d'importance puisqu'il s'agit de rapports de mesures algébriques.

Le point P appartient à la droite (BC), donc il est barycentre de (B,α) et $(C,1-\alpha)$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ car P est distinct de B et de C. Donc $\alpha\overrightarrow{PB}+(1-\alpha)\overrightarrow{PC}=\vec{0}$. Donc $\alpha\overline{PB}+(1-\alpha)\overline{PC}=0$. Donc $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, ce qui donne $\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} = \frac{1}{\alpha}$.

De même, le point Q appartient à la droite (CA), donc il est barycentre de (C,β) et $(A,1-\beta)$ avec $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1$, et $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\beta-1}{\beta}$, ce qui donne $\frac{\overline{CA}}{\overline{CQ}} = \frac{1}{1-\beta}$.

On peut remarquer que, pour que les points P, Q et R soient alignés, il faut que la droite (PQ) ne soit pas parallèle à (AB), donc que $\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} \neq \frac{\overline{CA}}{\overline{CQ}}$, donc $\alpha \neq 1-\beta$.

Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que R soit barycentre de (P,λ) et $(Q,1-\lambda)$. On peut remarquer que si λ existe, alors $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ car les points sont distincts des sommets du triangle, donc distincts entre eux.

Donc, d'après les propriétés d'homogénéité et d'associativité, les points P, Q et R sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que R soit barycentre de $(B,\lambda\alpha)$, $(C,\lambda(1-\alpha))$, $(C,(1-\lambda)\beta)$ et $(A,(1-\lambda)(1-\beta))$, donc de $(A,1-\lambda-\beta+\lambda\beta)$, $(B,\lambda\alpha)$ et $(C,\lambda+\beta-\lambda\alpha-\lambda\beta)$.

Or le point R appartient à la droite (AB), donc les points P, Q et R sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que R soit barycentre de $(A,1-\lambda\alpha)$ et $(B,\lambda\alpha)$ avec $\lambda+\beta-\lambda\alpha-\lambda\beta=0$, ce qui donne $\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1}$ car $\alpha \neq 1-\beta$.

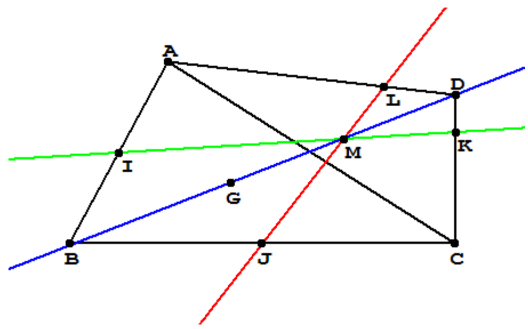
Donc les points P, Q et R sont alignés si et seulement si R est barycentre de (A,γ) et $(B,1-\gamma)$ avec $\gamma = 1-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}$, donc si $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{-\alpha\beta}{\alpha+\beta-1-\alpha\beta} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}$, donc si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}{\alpha\beta\gamma} = 1$.

3) Méthode pour démontrer un concours

Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont concourantes, il suffit de démontrer qu'il existe un point qui est à la fois barycentre de A et B, et barycentre de C et D.

Etant donné que deux droites non parallèles se coupent en un point, les seuls problèmes intéressants sont ceux du concours d'au moins trois droites. On cherche donc le point d'intersection de deux des droites et l'on montre qu'il appartient à la troisième droite, ce qui nous ramène à un problème d'alignement.

Exemple 1 : Soient A, B, C et D quatre points non alignés du plan, G le centre de gravité du triangle ABC, I le milieu du segment $[AB]$, J le milieu du segment $[BC]$, K et L les points définis par $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.
Démontrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.



I est le milieu du segment $[AB]$, donc barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$.

$\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0}$, donc K est barycentre de $(C,1)$ et $(D,3)$.

Un point M appartient à la droite (IK) s'il existe un réel α tel que M soit barycentre de (I,α) et $(K,1-\alpha)$, donc de $(I,4\alpha)$ et $(K,4-4\alpha)$, donc de $(A,2\alpha)$, $(B,2\alpha)$, $(C,1-\alpha)$ et $(D,3-3\alpha)$.

J est le milieu du segment $[BC]$, donc barycentre de $(B,1)$ et $(C,1)$.

$\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, donc $3\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{LA} = \vec{0}$, donc L est barycentre de $(A,1)$ et $(D,3)$.

Un point M appartient à la droite (JL) s'il existe un réel β tel que M soit barycentre de (J,β) et $(L,1-\beta)$, donc de $(J,4\beta)$ et $(L,4-4\beta)$, donc de $(A,1-\beta)$, $(B,2\beta)$, $(C,2\beta)$ et $(D,3-3\beta)$.

Les deux systèmes de points pondérés ont la même somme de coefficients 4.

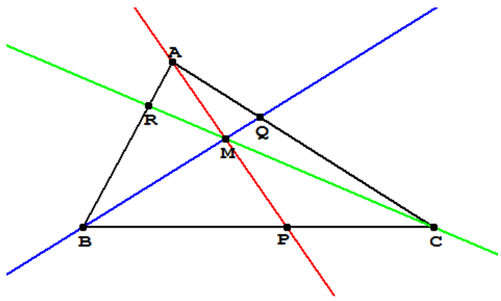
Donc le point M est intersection des droites (IK) et (JL) si et seulement si $\begin{cases} 2\alpha = 1-\beta \\ 2\alpha = 2\beta \\ 1-\alpha = 2\beta \\ 3-3\alpha = 3-3\beta \end{cases}$ ce qui équivaut à $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. Donc le point M d'intersection des droites (IK) et (JL) est barycentre de $\left(A,\frac{2}{3}\right)$, $\left(B,\frac{2}{3}\right)$, $\left(C,\frac{2}{3}\right)$ et $(D,1)$.

Or le point G est le centre de gravité du triangle ABC, donc l'isobarycentre des points A, B et C, donc le barycentre de $\left(A,\frac{2}{3}\right)$, $\left(B,\frac{2}{3}\right)$ et $\left(C,\frac{2}{3}\right)$.

Donc par associativité, le point M est barycentre de $(G,2)$ et $(D,1)$. Donc il appartient à la droite (DG).

Donc les trois droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

Exemple 2 (Théorème de Céva) :
Soit ABC un triangle, P, Q et R trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) et distincts des points A, B et C.
Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.



On fait un raisonnement analogue à celui du théorème de Ménélaüs.

Le point P appartient à la droite (BC), donc il est barycentre de (B,α) et $(C,1-\alpha)$ avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, et $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Donc un point M appartient à la droite (AP) s'il existe un réel λ tel que M soit barycentre de (P,λ) et $(A,1-\lambda)$, donc de $(A,1-\lambda)$, $(B,\lambda\alpha)$ et $(C,\lambda-\lambda\alpha)$.

Le point Q appartient à la droite (CA), donc il est barycentre de (C,β) et $(A,1-\beta)$ avec $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1$, et $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\beta-1}{\beta}$.

Donc un point M appartient à la droite (BQ) s'il existe un réel μ tel que M soit barycentre de (Q,μ) et $(B,1-\mu)$, donc de $(A,\mu-\beta\mu)$, $(B,1-\mu)$ et $(C,\beta\mu)$.

Pour que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes, il faut d'abord que les droites (AP) et (BQ) ne soient pas parallèles, donc que $\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} \neq \frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}$, donc $\alpha - \alpha\beta \neq 1$.

Les deux systèmes de points pondérés ont la même somme de coefficients 1.

Donc le point M est intersection des droites (AP) et (BQ) si et seulement si $\begin{cases} 1-\lambda = \mu - \beta\mu \\ \lambda\alpha = 1-\mu \\ \lambda - \lambda\alpha = \beta\mu \end{cases}$ ce qui équivaut à $\lambda = \frac{\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}$ et $\mu = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\beta}$.

Donc le point M d'intersection des droites (AP) et (BQ) est barycentre de $(A,1-\lambda)$, $(B,\lambda\alpha)$ et $(C,\lambda-\lambda\alpha)$ avec $\lambda=\dfrac{\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}$. La somme des coefficients vaut 1.

Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si le point M appartient à la droite (CR), donc si et seulement si il existe un réel δ tel que R soit barycentre de (M,δ) et $(C,1-\delta)$, donc de $(A,\delta-\delta\lambda)$, $(B,\alpha\delta\lambda)$, $(C,\lambda\delta-\alpha\delta\lambda)$ et $(C,1-\delta)$, donc de $(A,\delta-\delta\lambda)$, $(B,\alpha\delta\lambda)$, $(C,\lambda\delta-\alpha\delta\lambda+1-\delta)$.

Or le point R appartient à la droite (AB), donc il est barycentre de (A,γ) et $(B,1-\gamma)$ avec $\gamma\neq 0$ et $\gamma\neq 1$, et $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}$.

Donc les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si il existe un réel δ tel que : $\begin{cases}\gamma=\delta(1-\lambda)\\ 1-\gamma=\alpha\delta\lambda\\ \lambda\delta-\alpha\delta\lambda+1-\delta=0\end{cases}$, ce qui équivaut à $\delta=\dfrac{\gamma}{1-\lambda}$ et $1-\gamma=\dfrac{\alpha\gamma\lambda}{1-\lambda}$.

En effet, on peut diviser par $(1-\lambda)$ car $1-\lambda=\dfrac{1-\alpha+\alpha\beta-\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}=\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\alpha+\alpha\beta}\neq 0$.

Donc les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si $1-\gamma=\dfrac{\alpha\gamma\lambda}{1-\lambda}=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)}$, donc si $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\times\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\times\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=\dfrac{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}{\alpha\beta\gamma}=-1$.

4) Barycentre de trois points

> Si A, B et C sont trois points non alignés, quels que soient les réels α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ appartient au plan (ABC).

En effet : $\forall M\in\mathscr{E}\quad \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$, donc en particulier : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AC}$. Donc G appartient au plan (ABC).

Réciproquement, si A, B et C ne sont pas alignés, $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC). Donc pour tout point M du plan (ABC), il existe un couple unique (λ,μ) de réels tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, donc tel que $(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{MA}+\lambda\overrightarrow{MB}+\mu\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, donc M est barycentre de $\{(A,1-\lambda-\mu),(B,\lambda),(C,\mu)\}$ (la somme des coefficients est non nulle).

> Si A, B et C sont trois points non alignés, le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(A,1-\lambda-\mu)$, (B,λ) et (C,μ) lorsque (λ,μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Soit M un point du plan (ABC) donc barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. On suppose que M n'appartient pas aux côtés du triangle ABC, donc que α, β et γ ne sont pas nuls.

Si $\beta+\gamma=0$, la droite (AM) est parallèle à (BC) car $\alpha\overrightarrow{MA}=\beta\overrightarrow{BC}$, donc le point M est extérieur au triangle ABC.

Si $\beta+\gamma\neq 0$, on désigne par A' le barycentre de (B,β) et (C,γ). Donc, par associativité, M est le barycentre de (A,α) et $(A',\beta+\gamma)$. Donc A' est le point d'intersection des droites (AM) et (BC).

Donc le point M est intérieur au triangle ABC si et seulement si A' appartient au segment $[BC]$ et M appartient au segment $[AA']$, donc si $\begin{cases}\beta\gamma\geq 0\\ \alpha(\beta+\gamma)\geq 0\end{cases}$, donc si α, β et γ sont tous les trois de même signe.

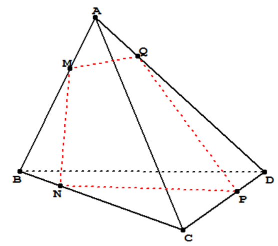
Si $\alpha=0$, la condition devient $\beta\gamma\geq 0$, ce qui équivaut à $M\in[BC]$. Si $\beta=0$, la condition devient $\alpha\gamma\geq 0$, ce qui équivaut à $M\in[AC]$. Si $\gamma=0$, la condition devient $\alpha\beta\geq 0$, ce qui équivaut à $M\in[AB]$. Dans les trois cas, M est intérieur au triangle ABC.

Si A, B et C sont trois points non alignés, le barycentre du système (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ est intérieur au triangle ABC si et seulement si α, β et γ sont de même signe. Par homogénéité, on peut les supposer tous les trois positifs.

5) Méthode pour démontrer une coplanarité

Pour montrer que quatre points sont coplanaires, il suffit donc de montrer que l'un d'entre eux est barycentre des trois autres.

Exemple : Soit $ABCD$ un tétraèdre, et deux réels a et b distincts de 0 et de 1. On construit les points M, N, P et Q tels que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=b\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=(1-a)\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DQ}=(1-b)\overrightarrow{DA}$.
Démontrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.



$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AM}-a\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, donc A est barycentre de $(M,1)$ et $(B,-a)$.

Et $\overrightarrow{CP}=(1-a)\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{DP}-a\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, donc D est barycentre de $(P,1)$ et $(C,-a)$.

La somme des coefficients des deux systèmes est la même : $1-a$.

Et $\overrightarrow{DQ}=(1-b)\overrightarrow{DA}$, donc Q est barycentre de $(A,1-b)$ et (D,b), donc de $(A,(1-b)(1-a))$ et $(D,b(1-a))$, donc de $(M,1-b)$, $(B,-a(1-b))$, (P,b) et $(C,-ab)$.

Or $\overrightarrow{BN}=b\overrightarrow{BC}$, donc N est le barycentre des points $(B,1-b)$ et (C,b), donc de $(B,-a(1-b))$ et $(C,-ab)$.

Donc, par associativité, Q est barycentre de $(M,1-b)$, $(N,-a)$ et (P,b).

Donc le point Q appartient au plan (MNP). Donc M, N, P et Q sont coplanaires.

IV - Points et droites remarquables du triangle

On suppose dans ce paragraphe que l'espace $\mathscr{E}$ est un plan affine euclidien.

1) Coordonnées barycentriques

On a vu que si trois points A, B et C ne sont pas alignés, tout point du plan (ABC) est barycentre de A, B et C affectés de certains coefficients.

Si A, B et C sont trois points non alignés et M un point du plan ABC, on appelle système de coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A,B,C) tout triplet (α,β,γ) de réels tel que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et tel que M soit barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).

Il n'y a pas unicité, sauf si l'on impose $\alpha+\beta+\gamma=1$, puisque l'on ne change pas un barycentre en multipliant tous les coefficients par un même réel non nul.

De plus, on a : $\forall N\in\mathscr{E}\quad (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{AN}+\beta\overrightarrow{BN}+\gamma\overrightarrow{CN}$.

Donc en particulier : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{CB}=(\alpha+\gamma)\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC}$.

Et : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MC}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{BC}=-\beta\overrightarrow{AB}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{AC}$.

Donc : $(\alpha+\beta+\gamma)^2\det(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})=\det[(\alpha+\gamma)\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC},-\beta\overrightarrow{AB}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{AC}]$.

Donc : $(\alpha+\beta+\gamma)^2\det(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})=[(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)-\beta\gamma]\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\det(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})=\alpha\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

De même : $(\alpha+\beta+\gamma)\det(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA})=\beta\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\beta\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Et : $(\alpha+\beta+\gamma)\det(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\gamma\det(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\gamma\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Donc α, β et γ sont proportionnels respectivement à $\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, $\det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ et $\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Or les coordonnées barycentriques sont connues à un coefficient près.
On peut remarquer que la propriété reste vraie si M est l'un des points A, B ou C.

Donc, si A, B et C sont trois points non alignés et M un point du plan ABC, un système de coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C) est défini par $\alpha = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, $\beta = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})$ et $\gamma = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

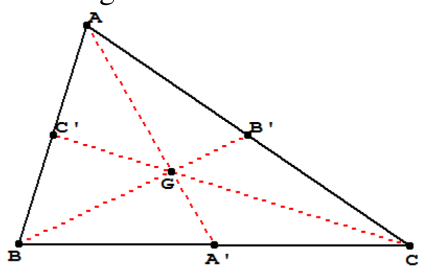
Si H est le projeté orthogonal de M sur la droite (BC), on a :
$\alpha = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \det(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}) = \det(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{HC}) + \det(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{MH})$.
Donc $\alpha = \det(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = \det(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{BC})$.

Si M n'appartient pas à (BC), on définit le repère orthonormé $(B, \vec{i}, \vec{j})$ par $\vec{i} = \dfrac{1}{BC}\overrightarrow{BC}$ et $\vec{j} = \dfrac{1}{HM}\overrightarrow{HM}$. Donc on a : $\alpha = \det(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 0 & BC \\ HM & 0 \end{vmatrix} = -HM \times BC$, donc $|\alpha| = 2 \times \text{aire}(MBC)$. Et cette égalité est encore vraie si M appartient à (BC) car $\alpha = 0$.
De même $|\beta| = 2 \times \text{aire}(MAC)$ et $|\gamma| = 2 \times \text{aire}(MAB)$.
Or, si M est intérieur au triangle, on peut prendre des coefficients α, β et γ positifs.

Si A, B et C sont trois points non alignés et si M est un point intérieur au triangle ABC, un système de coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C) est défini par $\alpha = \text{aire}(MBC)$, $\beta = \text{aire}(MAC)$ et $\gamma = \text{aire}(MAB)$.

2) Médianes

Dans un triangle, une médiane est une droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé. Un triangle possède donc trois médianes.
Soient A', B' et C' les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
Soit G le centre de gravité du triangle, c'est-à-dire l'isobarycentre de A, B et C, c'est-à-dire le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.
Les milieux des segments sont isobarycentres des extrémités de ces segments.
Donc, par associativité, en groupant les points par 2, G est barycentre de :



- $(A,1)$ et $(A',2)$, donc G appartient à la médiane (AA').
- $(B,1)$ et $(B',2)$, donc G appartient à la médiane (BB').
- $(C,1)$ et $(C',2)$, donc G appartient à la médiane (CC').

De plus : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

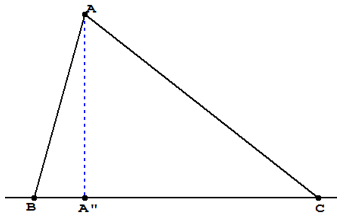
Dans un triangle ABC, les trois médianes sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle et qui est isobarycentre de A, B et C.

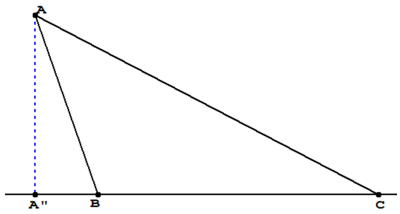
Le centre de gravité d'un triangle est toujours intérieur au triangle. Donc d'après ce qui précède, il partage le triangle en trois triangles de même aire.

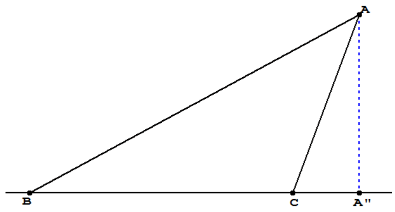
3) Hauteurs

Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est orthogonale au côté opposé. Un triangle possède donc trois hauteurs.

Notons $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles géométriques du triangle ABC. Donc $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$.
Soit A'' le projeté orthogonal de A sur (BC). Il y a trois dispositions possibles :







Dans le premier cas, on a : $\tan\hat{B}=\dfrac{AA''}{BA''}$ et $\tan\hat{C}=\dfrac{AA''}{CA''}$, donc $BA''\times\tan\hat{B}=CA''\times\tan\hat{C}$.

Donc $(\tan\hat{B})\overrightarrow{BA''}+(\tan\hat{C})\overrightarrow{CA''}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{BA''}$ et $\overrightarrow{CA''}$ sont colinéaires de sens contraires.

Dans le deuxième cas, on a $\tan\hat{B}=-\dfrac{AA''}{BA''}$ et $\tan\hat{C}=\dfrac{AA''}{CA''}$, donc $BA''\times\tan\hat{B}=-CA''\times\tan\hat{C}$.

Donc $(\tan\hat{B})\overrightarrow{BA''}+(\tan\hat{C})\overrightarrow{CA''}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{BA''}$ et $\overrightarrow{CA''}$ sont colinéaires de même sens.

Dans le troisième cas, on a $\tan\hat{B}=\dfrac{AA''}{BA''}$ et $\tan\hat{C}=-\dfrac{AA''}{CA''}$, donc $BA''\times\tan\hat{B}=-CA''\times\tan\hat{C}$.

Donc $(\tan\hat{B})\overrightarrow{BA''}+(\tan\hat{C})\overrightarrow{CA''}=\vec{0}$ car $\overrightarrow{BA''}$ et $\overrightarrow{CA''}$ sont colinéaires de même sens.

Dans les trois cas, on a : $(\tan\hat{B})\overrightarrow{BA''}+(\tan\hat{C})\overrightarrow{CA''}=\vec{0}$. Or $\tan\hat{B}+\tan\hat{C}\neq 0$ car $\hat{C}\neq\pi-\hat{B}$. Donc dans tous les cas, A'' est barycentre de $(B,\tan\hat{B})$ et $(C,\tan\hat{C})$.

De même, B'' est barycentre de $(A,\tan\hat{A})$ et $(C,\tan\hat{C})$, et C'' est barycentre de $(A,\tan\hat{A})$ et $(B,\tan\hat{B})$.

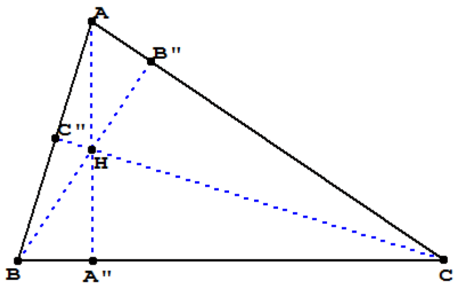
On sait que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$, donc $\tan\hat{A}=-=-\tan(\hat{B}+\hat{C})=-\dfrac{\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}{1-\tan\hat{B}\tan\hat{C}}$.

Donc $\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}=-(\tan\hat{B}+\tan\hat{C})\dfrac{\tan\hat{B}\tan\hat{C}}{1-\tan\hat{B}\tan\hat{C}}$. Or $\tan\hat{B}+\tan\hat{C}\neq 0$, $\tan\hat{B}\neq 0$ et $\tan\hat{C}\neq 0$, donc $\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}\neq 0$.

Donc on peut définir le point *H* barycentre de $(A,\tan\hat{A})$, $(B,\tan\hat{B})$ et $(C,\tan\hat{C})$.

Par associativité, *H* est barycentre de :

- $(A,\tan\hat{A})$ et $(A'',\tan\hat{B}+\tan\hat{C})$, donc le point *H* appartient à la hauteur (AA'').
- $(B,\tan\hat{B})$ et $(B'',\tan\hat{A}+\tan\hat{C})$, donc le point *H* appartient à la hauteur (BB'').
- $(C,\tan\hat{C})$ et $(C'',\tan\hat{A}+\tan\hat{B})$, donc le point *H* appartient à la hauteur (CC'').



> Dans un triangle *ABC*, les trois hauteurs sont concourantes en un point *H* appelé orthocentre du triangle et qui est barycentre de $(A,\tan\hat{A})$, $(B,\tan\hat{B})$ et $(C,\tan\hat{C})$.

L'orthocentre n'est pas toujours à l'intérieur du triangle.

4) Médiatrices

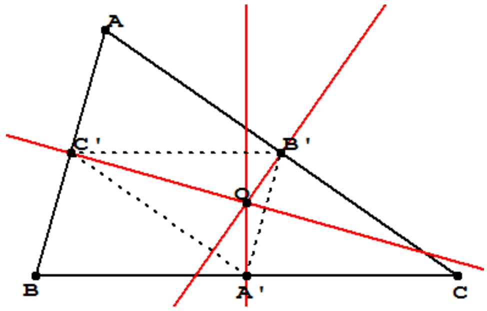
> Dans un triangle, une médiatrice est une droite qui est orthogonale à un côté en son milieu. Un triangle possède donc trois médiatrices.

Notons $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, et toujours $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles du triangle.
Soient A', B' et C' les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ sont sécantes car elles sont orthogonales à deux droites sécantes en *A*. Soit *O* leur point d'intersection.

Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités du segment. Donc $OA = OB$ et $OA = OC$. Donc $OB = OC$, et donc le point O appartient aussi à la médiatrice de $[BC]$. Donc les trois médiatrices sont concourantes en O.

De plus en notant $R = OA = OB = OC$, le cercle de centre O et de rayon R passe par les points A, B et C. C'est le cercle circonscrit au triangle ABC.



On peut remarquer que les côtés du triangle $A'B'C'$ sont parallèles à ceux du triangle ABC car les points A', B' et C' sont les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Donc chaque médiatrice du triangle ABC est hauteur du triangle $A'B'C'$. Donc le point O est orthocentre du triangle $A'B'C'$.
De plus, les angles du triangle $A'B'C'$ sont égaux à ceux du triangle ABC.

Donc d'après l'étude précédente, O est barycentre de $(A', \tan\hat{A})$, $(B', \tan\hat{B})$ et $(C', \tan\hat{C})$, donc de $(A', 2\tan\hat{A})$, $(B', 2\tan\hat{B})$ et $(C', 2\tan\hat{C})$.

Or A' est barycentre de $(B,1)$ et $(C,1)$, donc de $(B, \tan\hat{A})$ et $(C, \tan\hat{A})$.

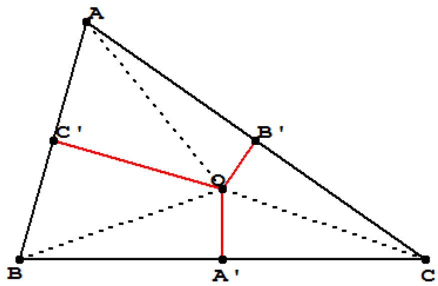
De même B' est barycentre de $(A, \tan\hat{B})$ et $(C, \tan\hat{B})$. Et C' est barycentre de $(A, \tan\hat{C})$ et $(B, \tan\hat{C})$.

Donc, par associativité, le point O est barycentre de $(B, \tan\hat{A})$, $(C, \tan\hat{A})$, $(A, \tan\hat{B})$, $(C, \tan\hat{B})$, $(A, \tan\hat{C})$ et $(B, \tan\hat{C})$.

Donc il est barycentre de $(A, \tan\hat{B} + \tan\hat{C})$, $(B, \tan\hat{A} + \tan\hat{C})$ et $(C, \tan\hat{A} + \tan\hat{B})$.

Dans un triangle ABC, les trois médiatrices sont concourantes en un point O qui est centre du cercle circonscrit du triangle et qui est barycentre de $(A, \tan\hat{B} + \tan\hat{C})$, $(B, \tan\hat{A} + \tan\hat{C})$ et $(C, \tan\hat{A} + \tan\hat{B})$.

Le point O n'est intérieur au triangle ABC que si tous les angles du triangle sont aigus.



Dans ce cas on peut raisonner autrement : il est barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) avec $\alpha = \text{aire}(OBC)$, $\beta = \text{aire}(OAC)$ et $\gamma = \text{aire}(OAB)$.

Or $\alpha = \text{aire}(OBC) = \dfrac{1}{2} \times OA' \times BC = aR\cos\hat{A}$.

De même $\beta == bR\cos\hat{B}$ et $\gamma = cR\cos\hat{C}$. Donc α, β et γ sont proportionnels à $a\cos\hat{A}$, $b\cos\hat{B}$ et $c\cos\hat{C}$.
On obtient un autre système de coordonnées barycentriques.

Si tous les angles sont aigus, le point O est barycentre de $(A, a\cos\hat{A})$, $(B, b\cos\hat{B})$ et $(C, c\cos\hat{C})$ si l'on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

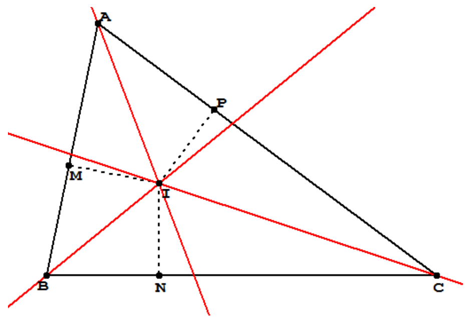
En utilisant la propriété $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$, on peut vérifier que les coefficients des deux systèmes de coordonnées barycentriques sont proportionnels.

5) <u>Bissectrices</u>

Dans un triangle, une bissectrice est un axe de symétrie de la figure formée par un sommet et les deux côtés adjacents. Il y a donc deux bissectrices par sommet, elles sont orthogonales et une seule des deux coupe le côté opposé (segment). Elle est appelée bissectrice intérieure et l'autre bissectrice extérieure. Un triangle possède donc trois bissectrices intérieures et trois bissectrices extérieures.

Notons $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et toujours $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles du triangle.

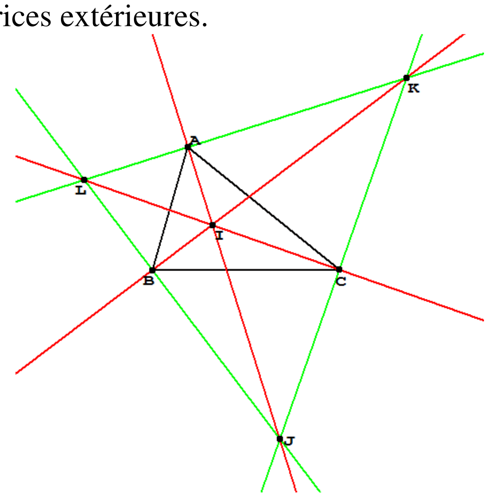
L'angle des bissectrices intérieures relatives aux sommets B et C est $\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$, donc elles ne sont pas parallèles car $\hat{B}+\hat{C}\neq 2\pi$. Soit I leur point d'intersection, M, N et P ses projetés orthogonaux sur les côtés (AB), (BC) et (AC). Puisque les réflexions sont des isométries, tout point d'une bissectrice est équidistant des deux côtés de l'angle. Donc $IM = IN$ et $IN = IP$.



Donc $IM = IP$, et donc I appartient à l'une des bissectrices relatives au sommet A. Or par construction, il est intérieur au triangle ABC. Donc il appartient à la bissectrice intérieure relative à A.
Donc les trois bissectrices intérieures sont concourantes au point I. De plus en notant $r = IM = IN = IP$, le cercle de centre I et de rayon r est tangent intérieurement aux trois côtés du triangle. C'est le cercle inscrit du triangle ABC.
Le point I est intérieur au triangle, donc barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha = \text{aire}(IBC)$, $\beta = \text{aire}(IAC)$ et $\gamma = \text{aire}(IAB)$.
Or $\alpha = \text{aire}(IBC) = \frac{1}{2}\times IM\times BC = \frac{r}{2}a$. De même $\beta = \frac{r}{2}b$ et $\gamma = \frac{r}{2}c$. Donc α, β et γ sont proportionnels à a, b et c.

Dans un triangle ABC, les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point I centre du cercle inscrit du triangle et qui est barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c) si l'on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Un raisonnement analogue peut être fait avec les bissectrices extérieures.
La bissectrice intérieure de A et les bissectrices extérieures de B et C sont concourantes en un point J centre d'un cercle exinscrit au triangle ABC et qui est barycentre de $(A,-a)$, (B,b) et (C,c).
La bissectrice intérieure de B et les bissectrices extérieures de A et C sont concourantes en un point K centre d'un cercle exinscrit au triangle ABC et qui est barycentre de (A,a), $(B,-b)$ et (C,c).
La bissectrice intérieure de C et les bissectrices extérieures de A et B sont concourantes en un point L centre d'un cercle exinscrit au triangle ABC et qui est barycentre de (A,a), (B,b) et $(C,-c)$.



6) Droite d'Euler

On a vu que, dans un triangle ABC :

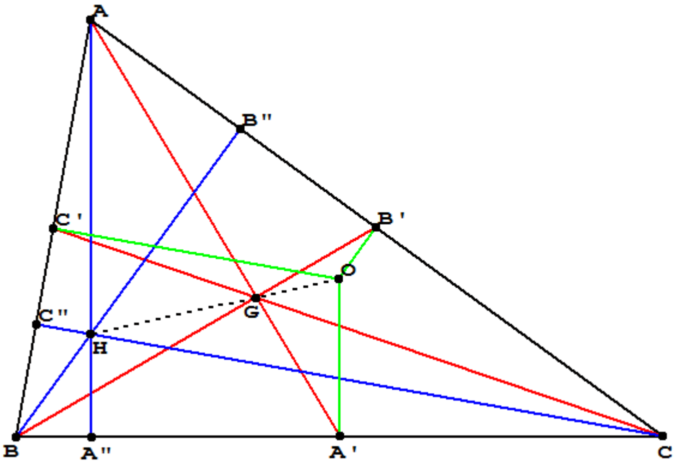
- le centre de gravité G est isobarycentre de A, B et C,
- l'orthocentre H est barycentre de $(A,\tan\hat{A})$, $(B,\tan\hat{B})$ et $(C,\tan\hat{C})$, et la somme des coefficients est $x = \tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}$.
- le centre O du cercle circonscrit au triangle est barycentre de $(A,\tan\hat{B}+\tan\hat{C})$, $(B,\tan\hat{A}+\tan\hat{C})$ et $(C,\tan\hat{A}+\tan\hat{B})$, et la somme des coefficients est $2x$.

Or le barycentre G' de $(H,1)$ et $(O,2)$ aussi le barycentre de (H,x) et $(O,2x)$.
Donc, par associativité, G' est barycentre de $(A,\tan\hat{A})$, $(B,\tan\hat{B})$, $(C,\tan\hat{C})$, $(A,\tan\hat{B}+\tan\hat{C})$, $(B,\tan\hat{A}+\tan\hat{C})$ et $(C,\tan\hat{A}+\tan\hat{B})$.

Donc G' est barycentre de $(A, \tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C})$, $(B, \tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C})$ et $(C, \tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C})$. Les trois coefficients sont égaux. Donc $G'=G$.

Donc G est barycentre de $(H,1)$ et $(O,2)$, donc G, H et O sont alignés et $\overrightarrow{HG}+2\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.

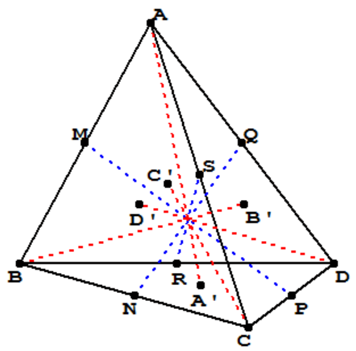
Dans un triangle, le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit sont alignés et $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$.
S'ils sont distincts, la droite qui les contient s'appelle la droite d'Euler du triangle.



V - Points et droites remarquables du tétraèdre

Dans un tétraèdre, une médiane est une droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée, et une bimédiane est une droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées.

Soit $ABCD$ un tétraèdre.



Les médianes sont donc les droites :
(AA') où A' est centre de gravité du triangle BCD,
(BB') où B' est centre de gravité du triangle ACD,
(CC') où C' est centre de gravité du triangle ABD,
(DD') où D' est centre de gravité du triangle ABC.

Les bimédianes sont les droites (MP), (NQ) et (RS) si M, N, P, Q, R et S sont les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[BD]$ et $[AC]$.

Soit G l'isobarycentre de A, B, C et D. Il est barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ et $(D,1)$. Par associativité, en groupant les points par 2 ou par 3, il est barycentre de :

- $(A,1)$ et $(A',3)$, donc G appartient à la médiane (AA') et $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.
- $(B,1)$ et $(B',3)$, donc G appartient à la médiane (BB') et $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BB'}$.
- $(C,1)$ et $(C',3)$, donc G appartient à la médiane (CC') et $\overrightarrow{CG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$.
- $(D,1)$ et $(D',3)$, donc G appartient à la médiane (DD') et $\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DD'}$.
- $(M,2)$ et $(P,2)$, donc G appartient à la bimédiane (MP).
- $(N,2)$ et $(Q,2)$, donc G appartient à la bimédiane (NQ).
- $(R,2)$ et $(S,2)$, donc G appartient à la bimédiane (RS).

Donc, dans un tétraèdre, les quatre médianes et les trois bimédianes sont concourantes au point G isobarycentre des quatre sommets du tétraèdre.

On peut également définir les hauteurs d'un tétraèdre (droites passant par un sommet et orthogonales au côté opposé), mais dans le cas général, elles ne sont pas concourantes.
Un tétraèdre dont les hauteurs sont concourantes s'appelle un tétraèdre orthocentrique, et le point de concours des hauteurs est appelé orthocentre du tétraèdre.
On peut démontrer qu'un tétraèdre est orthocentrique si et seulement si ses arêtes opposées sont deux à deux orthogonales, mais ce sont des raisonnements sur l'orthogonalité et pas sur les barycentres (donc pas dans le sujet de ce chapitre).

VI - Fonction scalaire de Leibniz

On suppose dans ce paragraphe que l'espace $\mathscr{E}$ est affine euclidien.

1) Définition

Etant donné un système $(A_k, \alpha_k)_{1 \le k \le n}$ de n points pondérés de $\mathscr{E}$, on appelle fonction scalaire de Leibniz associée l'application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M de $\mathscr{E}$ associe le réel $f(M) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k MA_k^2$.

<u>Exemple</u> : Si le système de points pondérés est $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, la fonction scalaire de Leibniz associe à tout point M le réel $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$.

2) Propriétés de la fonction scalaire de Leibniz

Comparons $f(M)$ et $f(N)$ pour deux points M et N de $\mathscr{E}$.

On a : $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad MA_k^2 = \overrightarrow{MA_k}.\overrightarrow{MA_k} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_k}).(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_k})$.

Donc : $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad MA_k^2 = MN^2 + 2\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NA_k} + NA_k^2$.

Donc : $f(M) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) MN^2 + 2\overrightarrow{MN}.\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{NA_k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k NA_k^2$.

On reconnaît la fonction vectorielle de Leibniz $\vec{F}$ associée au système $(A_k, \alpha_k)_{1 \le k \le n}$.

Donc : $\boxed{\forall (M,N) \in \mathscr{E}^2 \quad f(M) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) MN^2 + 2\overrightarrow{MN}.\vec{F}(N) + f(N)}$

Il y a donc deux cas suivant la valeur de la somme des coefficients.

- Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, le système $(A_k, \alpha_k)_{1 \le k \le n}$ admet un barycentre G et $\vec{F}(G) = \vec{0}$.

Si la somme des coefficients des points pondérés est non nulle et si G est le barycentre du système : $\forall M \in \mathscr{E} \quad f(M) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) MG^2 + f(G)$.

<u>Exemple</u> : Si le système de points pondérés est $\{(A,1),(B,1)\}$, le barycentre du système est le milieu I du segment $[AB]$.

Donc : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2$. Or $IA = IB = \frac{1}{2} AB$.

Donc $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2}$

- Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$, le système $(A_k, \alpha_k)_{1 \le k \le n}$ n'admet pas de barycentre et la fonction $\vec{F}$ est constante : il existe un vecteur $\vec{V}$ tel que $\forall N \in \mathscr{E} \quad \vec{F}(N) = \vec{V}$.

Si la somme des coefficients des points pondérés est nulle et si $\vec{V}$ est la valeur constante de la fonction vectorielle de Leibniz associée au système, alors on a : $\forall(M,N)\in\mathscr{E}^2 \quad f(M)=2\overrightarrow{MN}.\vec{V}+f(N)$.

Exemple : Si le système de points pondérés est $\{(A,1),(B,-1)\}$, le vecteur constant est $\vec{V}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$. Donc : $\forall(M,N)\in\mathscr{E}^2 \quad MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BA}+NA^2-NB^2$.

Donc pour $N=I$ milieu du segment $[AB]$: $\boxed{MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}}$

3) Lignes de niveau de la fonction scalaire de Leibniz

Etant donné un réel *m*, on appelle ligne de niveau *m* de la fonction scalaire de Leibniz *f* associée au système $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le n}$ de *n* points pondérés de $\mathscr{E}$ l'ensemble $\mathscr{L}_m$ des points de $\mathscr{E}$ tels que $f(M)=m$.

La nature des lignes de niveau dépend de l'expression de $f(M)$, donc de la somme des coefficients du système de points pondérés.

- Si $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\neq 0$ et si *G* est le barycentre du système, un point *M* appartient à $\mathscr{L}_m$ si et seulement si $\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)MG^2+f(G)=m$, donc si et seulement si $MG^2=\dfrac{m-f(G)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$.

Si la somme des coefficients des points pondérés est non nulle et si *G* est le barycentre du système, alors la ligne de niveau *m* de la fonction scalaire de Leibniz associée est :

- $\mathscr{L}_m=\varnothing$ si $\dfrac{m-f(G)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}<0$.
- $\mathscr{L}_m=\{G\}$ si $m=f(G)$.
- $\mathscr{L}_m$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\dfrac{m-f(G)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}}$ si $\dfrac{m-f(G)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}>0$.

Exemple : Si le système de points pondérés est $\{(A,1),(B,1)\}$ et *I* le milieu de $[AB]$, on a $f(I)=IA^2+IB^2=\frac{1}{2}AB^2$ et $\mathscr{L}_m=\{M\in\mathscr{E}\,/\,MA^2+MB^2=m\}$.

Donc $\mathscr{L}_m=\varnothing$ si $m<\frac{1}{2}AB^2$, $\mathscr{L}_m=\{I\}$ si $m=\frac{1}{2}AB^2$ et $\mathscr{L}_m$ est le cercle de centre *I* et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2m-AB^2}$ si $m>\frac{1}{2}AB^2$.

En particulier, si $m=AB^2$, on trouve le cercle de centre *I* et de rayon $\frac{1}{2}AB$.

Donc l'ensemble des points *M* tels que $MA^2+MB^2=AB^2$ (donc tels que le triangle *MAB* soit rectangle en *M*) est le cercle de diamètre $[AB]$.

- Si $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k 0$, si *O* est un point fixé de $\mathscr{E}$ et si $\vec{V}$ est la valeur constante de la fonction vectorielle de Leibniz associée au système, alors un point *M* appartient à $\mathscr{L}_m$ si et seulement si $2\overrightarrow{MO}.\vec{V}+f(O)=m$, donc si et seulement si $\overrightarrow{OM}.\vec{V}=\frac{1}{2}[f(O)-m]$.

  Si $\vec{V}=\vec{0}$, $\mathscr{L}_m=\varnothing$ si $m\neq f(O)$ et $\mathscr{L}_m=\mathscr{E}$ si $m=f(O)$.

Si $\vec{V} \neq \vec{0}$, on a $\overrightarrow{OM}.\vec{V} = \overrightarrow{OH}.\vec{V}$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (D) passant par le point O et de vecteur directeur $\vec{V}$.

Or $\overrightarrow{OH} = \lambda\vec{V}$, donc $\overrightarrow{OH}.\vec{V} = \lambda\vec{V}.\vec{V} = \lambda\|\vec{V}\|^2$, donc $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{OH}.\vec{V}}{\|\vec{V}\|^2}$.

Donc un point M appartient à $\mathscr{L}_m$ si et seulement si $\overrightarrow{OH} = \dfrac{f(O)-m}{2\|\vec{V}\|^2}\vec{V}$, ce qui définit un point H unique. Donc $\mathscr{L}_m$ est la droite orthogonale à (D) et passant par ce point H.

Si la somme des coefficients des points pondérés est nulle et si $\vec{V}$ est la valeur constante de la fonction vectorielle de Leibniz associée au système, alors la ligne de niveau m de la fonction scalaire de Leibniz associée est :

- $\mathscr{L}_m$ est une droite orthogonale à $\vec{V}$ si $\vec{V} \neq \vec{0}$.
- $\mathscr{L}_m = \varnothing$ ou $\mathscr{L}_m = \mathscr{E}$ si $\vec{V} = \vec{0}$.

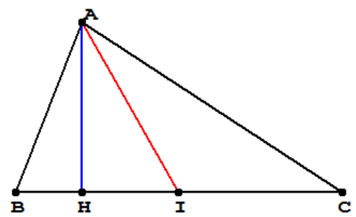
Exemple : Si le système de points pondérés est $\{(A,1),(B,-1)\}$, la valeur constante de la fonction vectorielle de Leibniz est $\vec{V} = \overrightarrow{BA}$ non nul si $A \neq B$. Donc la ligne de niveau et $\mathscr{L}_m = \{M \in \mathscr{E} \,/\, MA^2 - MB^2 = m\}$ est une droite orthogonale à (AB).

Si I est le milieu de $[AB]$, elle passe par le point H défini par $\overrightarrow{IH} = \dfrac{f(I)-m}{2AB^2}\overrightarrow{BA}$. Or $f(I) = IA^2 - IB^2 = 0$. Donc $\overrightarrow{IH} = \dfrac{-m}{AB^2}\overrightarrow{IA}$.

En particulier, si $m = 0$, on trouve la droite passant par I et orthogonale à (AB).
Donc l'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

4) Exemples d'applications géométriques

Exemple 1 : Soit ABC un triangle de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
Soit I le milieu du segment $[BC]$, et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Calculer en fonction de a, b et c les longueurs de la médiane AI et de la hauteur AH du triangle



D'après ce qui précède, pour tout point M du plan : $MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

En particulier pour le point A : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ (Théorème de la médiane).

Donc $AI^2 = \dfrac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \dfrac{a^2}{2}\right)$. Donc $\boxed{AI = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$

D'autre part, pour tout point M du plan : $MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BC}$.

En particulier pour le point A : $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BC}$.

Or $\left|\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BC}\right| = IH \times BC$ donc $IH = \dfrac{|c^2 - b^2|}{2a}$ et $AH^2 = AI^2 - IH^2$. Donc :

$$AH^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) - \frac{(c^2 - b^2)^2}{4a^2} = \frac{1}{4a^2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2}[4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2] = \frac{1}{4a^2}(2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2).$$

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2}[a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2] = \frac{1}{4a^2}(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$$

Donc $\boxed{AH = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}$

<u>Exemple 2</u> : Soient A et B deux points distincts du plan, et $a = AB$.
Déterminer, pour tout réel positif k, l'ensemble $\mathscr{C}_k$ des points M du plan (distincts de B) tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

Un point M appartient à $\mathscr{C}_k$ si et seulement si $MA^2 - k^2MB^2 = 0$. Donc $\mathscr{C}_k$ est la ligne de niveau 0 de la fonction scalaire de Leibniz définie par $f(M) = MA^2 - k^2MB^2$.
La somme des coefficients est $s = 1-k^2$. Donc : $s = 0 \Leftrightarrow k = 1$.
Si $k = 1$, $\mathscr{C}_k$ est l'ensemble des points tels que $\frac{MA}{MB} = 1$, donc tels que $MA = MB$.

Donc $\mathscr{C}_k$ est la médiatrice de $[AB]$ si $k = 1$.

Si $k \neq 1$, on introduit le barycentre G de $(A,1)$ et $(B,-k^2)$, donc $\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{GA} = k^2\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{k^2}{k^2-1}\overrightarrow{AB}$ (ce qui permettra de le construire).

Donc $GA^2 = \frac{k^4a^2}{(k^2-1)^2}$ et $GB^2 = \frac{a^2}{(k^2-1)^2}$. Donc $f(G) = GA^2 - k^2GB^2 = \frac{k^2a^2}{k^2-1}$.
Or, d'après l'étude de la ligne de niveau 0 de la fonction scalaire de Leibniz, la discussion se fait sur le signe de $\frac{-f(G)}{1-k^2} = \frac{f(G)}{k^2-1} = \frac{k^2a^2}{(k^2-1)^2}$ qui est positif.

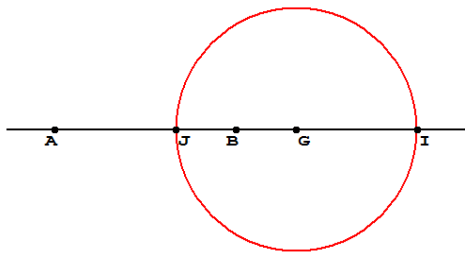
Donc, si $k \neq 1$, $\mathscr{C}_k$ est le cercle de centre le barycentre G de $(A,1)$ et $(B,-k^2)$ et de rayon $\frac{ka}{|k^2-1|}$. Il est réduit à $\{G\}$ si $k = 0$.

On peut remarquer que les coefficients définissant G sont de signes contraires. Donc le point G n'appartient pas au segment $[AB]$.
On peut aussi raisonner autrement en remarquant que la relation $MA^2 - k^2MB^2 = 0$ équivaut à $(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$.
Donc si I est barycentre de $(A,1)$ et $(B,-k)$, et J barycentre de $(A,1)$ et (B,k), la relation équivaut à $(1-k^2)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$.

Donc, si $k \neq 1$, $\mathscr{C}_k$ est le cercle de diamètre $[IJ]$ où I est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,-k)$, et J le barycentre de $(A,1)$ et (B,k).

Un seul des deux points (le point J) appartient au segment $[AB]$.
Par exemple, pour $k = 2$:

- soit on construit le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, et $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}AB$.
- soit on construit les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, et $\mathscr{C}_2$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.



Exemple 3 : Soit ABC un triangle de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et trois réels α, β, γ tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Soit G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).
Calculer GA^2, GB^2 et GC^2.

D'après l'expression de la fonction scalaire de Leibniz :
$\forall M \in \mathscr{E} \quad f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + f(G)$.
En particulier :

- pour $M = A$: $\beta c^2 + \gamma b^2 = (\alpha+\beta+\gamma)GA^2 + f(G)$.
- pour $M = B$: $\alpha c^2 + \gamma a^2 = (\alpha+\beta+\gamma)GB^2 + f(G)$.
- pour $M = C$: $\alpha b^2 + \beta a^2 = (\alpha+\beta+\gamma)GC^2 + f(G)$.

On multiplie la première ligne par α, la deuxième par β, la troisième par γ et l'on additionne en remarquant que $\alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 = f(G)$:
$\alpha(\beta c^2 + \gamma b^2) + \beta(\alpha c^2 + \gamma a^2) + \gamma(\alpha b^2 + \beta a^2) = 2(\alpha+\beta+\gamma)f(G)$.

Donc $f(G) = \dfrac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$.

On en déduit GA^2, GB^2 et GC^2 à partir des trois relations précédentes :

$$(\alpha+\beta+\gamma)GA^2 = \beta c^2 + \gamma b^2 - f(G) = \beta c^2 + \gamma b^2 - \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Donc : $\boxed{GA^2 = \dfrac{-\beta\gamma a^2 + \gamma(\beta+\gamma)b^2 + \beta(\beta+\gamma)c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}}$ et de même :

$\boxed{GB^2 = \dfrac{\gamma(\alpha+\gamma)a^2 - \alpha\gamma b^2 + \alpha(\alpha+\gamma)c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}}$ et $\boxed{GC^2 = \dfrac{\beta(\alpha+\beta)a^2 + \alpha(\alpha+\beta)b^2 - \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}}$

On peut appliquer les calculs aux points remarquables du triangle.
Par exemple si G est le centre de gravité du triangle, donc si $\alpha = \beta = \gamma = 1$:

$$GA^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \qquad GB^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2) \qquad GA^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Si I est le centre du cercle inscrit du triangle, donc si $\alpha = a$, $\beta = b$ et $\gamma = c$:

$$IA^2 = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} \qquad IB^2 = \frac{ca(c+a-b)}{a+b+c} \qquad IC^2 = \frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}$$

Pour l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit, les calculs sont plus compliqués.