1. **Résoudre : (a) $\quad D^2y+4y=\cos^2 x$ et : (b) $\quad D^2y+4y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$** E4-124
2. **f est solution du problème de Cauchy $\left(y"+(\cos t)y=e^{t^2}\ ;\ y(0)=1\ ;\ y'(0)=0\right)$. Prouver que f est paire.**
3. **Résoudre $D^2y-\tan tDy+2y=0$ sur $]0,\pi/2[$**
   - en remarquant que $(y_0: t\mapsto \sin t)$ est une solution particulière,
   - en utilisant le Wronskien de (y,y_0). e4-102
4. **Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $A_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. On considère l'équation différentielle : (E) $\quad \begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}=A_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$**

   Déterminer la solution générale de (E) quand (α,β) prend les valeurs suivantes :

   $$(1,6);(3,2);(4,-1);(2,-1)$$

   Dans chaque cas, représenter la trajectoire correspondant à la condition initiale $(x(t_0),y(t_0))=(x_0,y_0)$ E4-122
5. **Résoudre $x^2D^2y+3xDy+y=1+x^2$ sur $I_1=\mathbb{R}_-^*$ puis sur $I_2=\mathbb{R}_+^*$ en utilisant les changements de variable $t\mapsto x=\pm\exp(t)$.** e4-027
6. **Soit (E) $\quad Dy=e^y-x$.**
   Résoudre (E) en utilisant la fonction $z=e^{-y}$. Représenter la solution vérifiant $y(0)=1$. e3-84
7. **Résoudre $x=Dy+\sin(Dy)$; on utilisera le paramétrage $t=Dy$.** E3-65

---

8. *Soit y (resp z) une solution de $D^2y(t)+\phi_1(t)y(t)=0$ (resp $D^2z(t)+\phi_2(t)z(t)=0$) où ϕ_1 (resp ϕ_2) est une fonction réelle continue sur $[a,+\infty[$. On suppose que $\forall t\geq a \quad \phi_1(t)\geq\phi_2(t)$.*
   Prouver qu'entre deux zéros de z, il existe un zéro de y.
   Application : J_0 est solution de $(xy"+y'+xy=0\ ;\ y(0)=1\ ;\ y'(0)=0)$; étudier ses zéros. E4-149
9. *Soit y une solution de $D^2y(t)+\phi(t)y(t)=0$ où ϕ est une fonction réelle continue sur I telle que y s'annule en un point a de I mais y n'est pas la fonction nulle. Prouver que : $\exists\alpha>0\quad\forall t\in[a-\alpha,a+\alpha]\setminus\{a\}\quad y(t)\neq 0$.*
   (ie les zéros de y sont "isolés") E4-150
10. *Soit le système différentiel $\left(\dfrac{dx}{dt}=2(x-ty)\ ,\ \dfrac{dy}{dt}=2y\right)$.*
    Résoudre (E).
    On utilise la méthode d'Euler avec un pas h de $t=t_0=0$ à $t=t_n=nh$ pour trouver la courbe intégrale qui passe par le point (x_0,y_0) à l'instant $t=0$. Calculer explicitement (x_n,y_n) en fonction de x_0,y_0,n,h et vérifier la convergence de la solution approchée vers la solution exacte quand $n\to+\infty$. e3-85

---

11. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une fonction continue sur I et b une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annulant pas sur I. Trouver une condition nécessaire sur a et b pour que (E) : $y"+ay'+by=0$ admette des solutions inverses l'une de l'autre. Cette condition est-elle suffisante ?
    Application numérique : résoudre $4xy"+2y'-y=0$. Existe-t-il des solutions $\mathcal{C}^\infty$?
    Existe-t-il des solutions de (E) développables en série entière ? *Centrale* e4-001
12. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y"+|y|=0\\ y(0)=a\\ y'(0)=0\end{cases}$ On distinguera $a<0, a>0$ et $a=0$. *Centrale* e4-005
13. Soit (E) $(1-t^2)y"-ty'-a^2y=0$. Résoudre (E) en remarquant que $t\mapsto\exp(a\arcsin t)$ est une solution. E4-11
14. Soit (E) $(t+1)y"-2y'-(t-1)y=te^{-t}$. Résoudre en vérifiant que $t\mapsto e^t$ est une solution de l'équation sans second membre. E4-36
15. Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

    $$\forall x\in\mathbb{R}\quad \frac{x}{3}(f(x)+2f(0))=\int_0^x f(t)\,dt$$

    E4-19

16. Résoudre $(a)\quad D^2y - 2Dy - 3y = \dfrac{\exp(3x)}{\operatorname{ch}^2 x}\qquad (b)\quad D^2y + 3Dy + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$. e4-144
17. Résoudre l'équation différentielle $y" + y' + y = \varphi$ où φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donnée.
    Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f"(x) + f'(x) + f(x)) = 0$.
    Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. e4-134
18. Soit $(E)\quad D^2y + e^{-t^2}y = \sin t$ et f une solution réelle sur $I = [0,+\infty[$ de (E).
    Démontrer que, si f est bornée sur I et de carré intégrable sur I, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
    On pourra étudier l'intégrabilité sur I de $D^2f - \sin$. e4-132
19. Soit (E) $D^2y + e^x y = 0$; prouver que toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
    Généralisation à une équation $D^2y + f(x)y = 0$? e4-151
20. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x" = x - \dfrac{15}{4}y' + e^{2t} \\ y" = -y - x' \end{cases}$.
    On pourra éventuellement se ramener à un système de premier ordre. *Centrale* e4-003
21. Résoudre $x = \left(\dfrac{Dy-1}{Dy+1}\right)^2$ en paramétrant avec $t = Dy$. E3-73
22. Soit $(E) : y' = \dfrac{x+y+a}{x-y+b}$.
    Déterminer une transformation du type $(x,y) \mapsto (X = x+\beta, Y = y+\alpha)$ telle que (E) soit équivalente à $Y' = \dfrac{X+Y}{X-Y}$. Résoudre (E). e3-032