Fiche 4 corrigé

Exercice 1

$A(-5,2), B(3,-2), C(0,7)$.

a. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point d'intersection des médiatrices

Soit $I(-1,0)$ le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$

$M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow 8(x+1) - 4y = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$

Soit $J\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$ le milieu de $[AC]$ et Δ' la médiatrice de $[AC]$

$M(x,y) \in \Delta' \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow 5\left(x+\frac{5}{2}\right) + 5\left(y - \frac{9}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

$$\Omega(x,y) = \Delta \cap \Delta' \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC est le point $\Omega(0,2)$ Son rayon est $R = A\Omega = 5$

Equation cartésienne :

$$M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 25 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0}$$

b. Soit D la droite d'équation $4x + 3y - 31 = 0$

$d(\Omega, D) = \frac{|4 \times 0 + 3 \times 2 - 31|}{\sqrt{16+9}} = 5 = R$ donc

la droite d'équation $4x + 3y - 31 = 0$ est tangente à ce cercle.

Exercice 2

$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$, P est le plan passant par A, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{w}$, P' est le plan passant par B, dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et $\Delta = P\cap P'$.

$\vec{w}$ étant vecteur directeur de P et de P', $\vec{w}$ est un vecteur directeur de Δ.

$\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$ donc Δ est orthogonale à D et D'. Montrons que Δ et D sont sécantes.
$\Delta\cap D=\left(P'\cap P\right)\cap D=P'\cap\left(P\cap D\right)=P'\cap D$ car $D\subset P$

or D et P' sont sécantes car $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$, ne sont pas coplanaires.

Donc Δ et D sont sécantes et également Δ et D'.

Finalement Δ est la perpendiculaire commune à D et D'.

Application

$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}, \vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Soit les droites D passant par $A(1,-1,0)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et

D' passant par $B(2,0,1)$ et dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

a. $d\acute{e}t\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}1&3&1\\1&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1$ donc D et D' ne sont pas coplanaires.

$H=D\cap\Delta=P'\cap D$

équation cartésienne de P'

$$M(x,y,z)\in P'\Leftrightarrow d\acute{e}t\left(\overrightarrow{BM},\vec{v},\vec{w}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-2&1&-1\\y&1&1\\z-1&0&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x-y+2z-4=0$$

système d'équations paramétriques de D : $\begin{cases}x=1+3k\\y=-1+2k\\z=k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$

Les coordonnées de H vérifient le système : $\begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ x = 1 + 3k \\ y = -1 + 2k \\ z = k \end{cases}$ ce qui après résolution donne

$H\left(3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$H' = D' \cap \Delta = P \cap D'$

équation cartésienne de P

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow dét\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{w}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -1 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 5z - 5 = 0$$

système d'équations paramétriques de D' : $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = k \\ z = 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

Les coordonnées de H vérifient le système : $\begin{cases} x - 4y + 5z - 5 = 0 \\ x = 2 + k \\ y = k \\ z = 1 \end{cases}$ ce qui après résolution

donne

$H'\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

et finalement $(HH')^2 = \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

donc $d(d, D') = HH' = \frac{1}{\sqrt{3}}$

autre méthode :

$$d(D, D') = \frac{\left|dét\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)\right|}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 3

On note $a,b,c...$les affixes des points $A,B,C...$

$AB = AE$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{e-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \Leftrightarrow e = -j^2(b-a) \quad a\cdot$

$BC = BF$ et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}) = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{f-b}{c-b} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j \Leftrightarrow f = -j(c-b) \quad b$

$CD = CG$ et $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG}) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{g-c}{d-c} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \Leftrightarrow g = -j^2(d-c) \quad c$

$DA = DH$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH}) = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{h-d}{a-d} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j \Leftrightarrow h = -j(a-d) \quad d\cdot$

Pour montrer que $EFGH$ est un parallélogramme on peut montrer que $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu, ce qui revient à montrer que $\dfrac{e+g}{2} = \dfrac{f+h}{2}$, soit $e+g = f+h$.

$e+f = -j^2(b-a+d-c)+a+c$

$f+h = -j(c-b+a-d)+b+d$

donc $(e+g)-(f+h) = (b-a+d-c)(-j^2-j)+a+c-b-d = (b-a+d-c)(-j^2-j-1)$

Or $1+j+j^2 = 0$ donc $e+g = f+h$ et $\boxed{EFGH \text{ est un parallélogramme}}$

Exercice 4

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite *D* d'équation $x - y = 0$

Soit I le milieu de $[AB]$: $I(2,1)$

Cherchons les coordonnées du point Ω, centre du cercle (C) passant par A et B et tangent à la droite *D.*

$A(3,3) \in (C)$ donc $\overrightarrow{A\Omega} \perp \vec{u}$ soit $(x-3)+(y-3) = 0 \Leftrightarrow x+y-6 = 0$

$\overrightarrow{A\Omega} \perp \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow (x-2)+2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x+2y-4 = 0$ car
Ω est sur la médiatrice de $[AB]$

les coordonnées du point Ω vérifient le système $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

soit $\Omega(8, -2)$

$\Omega\text{A}^2 = 25 + 25 = 50$

$\Omega\text{B}^2 = 49 + 1 = 50$

Le cercle (C) passant par A et B et tangent à la droite *D* a donc pour équation :

$(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 50 \Leftrightarrow x^2 + y^2 16x + 4y + 18 = 0$