Fiche 5 : intégrales

Exercice 1

Donner la valeur des intégrales suivantes :

$\int_0^4 \frac{1}{1+t}\,dt$, $\int_0^2 \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$, $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $\int_0^3 \frac{2t}{1+t^2}\,dt$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

Exercice 2

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\,dt$.

A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence sur I_n puis exprimer I_n à l'aide de factorielles.

Exercice 3

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt$

Exercice 4

a. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{x}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

En déduire $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^4 - 5x^2 + 4}\,dx$.

b. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$: $g(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}$.

En déduire $\int_0^1 \frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}\,dx$

c. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$: $h(x) = \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}$.

En déduire $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Exercice 5

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{2x^3+x^2+2x-4}{(x^2-4)(x^2+1)}$ et en déduire $\int_0^1 \frac{2x^3+x^2+2x-4}{(x^2-4)(x^2+1)}\, dx$

Exercice 6

Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx$ converge et la calculer.