Fiche 6 corrigé

<u>Exercice 1</u>

a. $(E): xy' - 2y = x^3 \cos x$

$I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$
$(E_0): xy' - 2y = 0$
On constate que la fonction y_o définie par $y_o(x) = x^2$ est solution de (E_0)
Donc $S_0 = \left\{ \begin{matrix} I & \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^2 \end{matrix} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x) y_o(x)$
$y'(x) = \lambda'(x) y_o(x) + \lambda(x) y_o{}'(x)$
y est solution de (E) sur I
$\Leftrightarrow \forall x \in I, x\big(\lambda'(x) y_o(x) + \lambda(x) y_o{}'(x)\big) - 2\,\lambda(x) y_o(x) = x^3 \cos x$
$\Leftrightarrow \forall x \in I, x\lambda'(x) y_o(x) = x^3 \cos x$
$\Leftrightarrow \forall x \in I, \lambda'(x) = \cos x$
Ce qui nous donne $\lambda(x) = \sin x$ soit $y(x) = x^2 \sin x$

Et $S = \left\{ \begin{matrix} I & \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x^2 + x^2 \sin x \end{matrix} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

b. $(E): (1 + x^2) y' + xy = 2x^2 + 1$
$I = \mathbb{R}$

$(E_0): (1 + x^2) y' + xy = 0$
On pose $a(x) = \frac{x}{1+x^2}$
donc $A(x) = \frac{1}{2} ln(1 + x^2) = ln\sqrt{1 + x^2}$ avec A une primitive de a
y_o définie par $y_o(x) = e^{-A(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est solution de (E_0)

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = ax + b$
y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a(1 + x^2) + x(ax + b) = 2x^2 + 1$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 + bx + a = 2x^2 + 1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Soit $S = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + x \end{matrix} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 2

$(E): x(x^2-1)y'+2y=x^2$

c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'équation homogène associée est :

$(E_0): x(x^2-1)y'+2y=0$.

$I=]-1,0[$ ou $I=]0,1[$

sur I $\quad (E_0) \Leftrightarrow y'+\dfrac{2}{x(x^2-1)}y=0$

on pose $a(x)=\dfrac{2}{x(x^2-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x\quad 1}$

$$a=[a(x)]_{x=1}=\left[\frac{2}{(x+1)(x-1)}\right]_{x=0}=\quad 2$$

$$b=[(x-1)a(x)]_{x=1}=\left[\frac{2}{x(x+1)}\right]_{x=1}=1$$

$$c=[(x+1)a(x)]_{x=-1}=\left[\frac{2}{x(x-1)}\right]_{x=-1}=1$$

soit $a(x)=\dfrac{2}{x(x^2-1)}=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x\quad 1}$

alors $A(x)=-2\ln|x|+\ln|x-1|+\ln|x+1|=\ln\dfrac{1-x^2}{x^2}$, $(\forall x\in I, 1-x^2>\quad 0)$, A étant une primitive de a et $e^{-A(x)}=e^{-\ln\frac{1-x^2}{x^2}}=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions y_0 définies sur I par $y_0(x)=k\frac{x^2}{1-x^2}, k\in\mathbb{R}$

.

Recherche d'une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante :

On pose $y(x)=k(x)y_0(x)$ avec $y_0(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

Alors $y(x)=k'(x)y_0(x)+k(x)y_0'(x)$

y est solution de (E_1)sur I

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)(k'(x)y_0(x))+\underbrace{x(x^2-1)(k(x)y_0'(x))+2k(x)y_0(x)}_{=0}=x^2$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)k'(x)y_0(x) \quad x^2$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)k'(x)\frac{x^2}{1-x^2} \quad x^2$$

$$\Leftrightarrow k'(x)= \quad \frac{1}{x}$$

et on prend $k(x)=-\ln|x|$

ce qui donne $y(x)=-\dfrac{x^2\ln|x|}{1-x^2}$

$$S=\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(k-ln|x|)x^2}{1-x^2} \end{array} ,k\in\mathbb{R}\right\}$$

<u>Exercice 3</u>

$y''+5y'+6y=x^2e^{-3x}$

c'est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants dont l'équation homogène associée est :

$(E_0): y''+5y'+6y=0$

l'équation caractéristique est : $(e): r^2+5r+6=0$ de racines -2 et -3

$$\mathcal{S}_0=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ae^{-2x}+Be^{-3x}, (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$$

on cherche une solution particulière sous la forme :

$y_1(x) = P(x)e^{-3x}$

$y_1'(x) = \left(P'(x) - 3P(x)\right)e^{-3x}$

$y_1''(x) = \left(P''(x) - 6P'(x) + 9P(x)\right)e^{-3x}$

y_1 est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \left(P''(x) - P(x)\right)e^{-3x} = x^2e^{-3x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P''(x) - P(x) = x^2$

P est un polynôme de degré 3

On pose : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Alors $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $P''(x) = 6ax + 2b$

On obtient alors : $\forall x \in \mathbb{R}, 6ax + 2b - (3ax^2 + 2bx + c) = x^2$

Donc par identification $\begin{array}{l} -3a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = -\frac{1}{3} \\ b = -1 \\ c = -2 \end{array}$

Soit $y_1(x) = -\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)e^{-3x}$

Et

$$S = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-3x} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)e^{-3x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

<u>Exercice 4</u>

a. (E) : $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}$
   $(E_0) : y'' + 2y' + 2y = 0$

   (e) : $r^2 + 2r + 2 = 0$

Les solutions de (e) sont : $r = -1 \pm i$ donc
$\mathcal{S}_0 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (Acosx + Bsinx)e^{-x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

Recherche d'une solution particulière sous la forme $y(x) = P(x)e^{-x}$

notée : $y = Pe^{-x}$

donc $y' = P'e^{-x} - Pe^{-x}$

et $y'' = P''e^{-x} - 2P'^{e^{-x}} + Pe^{-x}$

y est solution de (E_0) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P" + P = x^2$

P est donc un polynôme de degré 2 soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ donc $P"(x) = a$

On obtient ainsi le système :

$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$2a + c = 0$$

Soit $y(x) = (x^2 - 2)e^{-x}$ et

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (Acosx + Bsinx)e^{-x} + (x^2 - 2)e^{-x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

b. (E) : $y" - 5y' + 6y = \sin x$
$(E_0) : y" - 5y' + 6y = 0$
(e) : $r^2 - 5r + 6 = 0$

Les solutions de (e) sont : $r = 2$ et $r = 3$ donc

$$\mathcal{S}_0 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ae^{2x} + Be^{3x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Recherche d'une solution particulière sous la forme $y(x) = a \sin x + b \cos x$

$$y(x) = a \sin x + b \cos x$$

$$y'(x) = a \cos x - b \cos x$$

$$y"(x) = -a \sin x - b \cos x$$

y est solution de (E_0) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-a+5b+6a)\sin x + (-b-5a+6b)\cos x = \sin x$

Soit : $5(a+b) = 1$ et $5(b-a) = 0$

Donc $a = b = \frac{1}{10}$ et
$y(x) = \frac{1}{10}(sin\ x + cos\ x)$ et

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{10}(sin\ x + cos\ x), (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

c. $(E): y" - y' - 2y = (x^3 + x^2 + x + 1)e^x$
$(E_0): y" - y' - 2y = 0$

$(e): r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1\ ou\ r = 2$

$$S_0 = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \end{matrix} \right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = P(x)e^x$

$y(x) = P(x)e^x$

$y'(x) = P'(x)e^x + P(x)e^x$

$y''(x) = P''(x)e^x + 2\,P'(x)e^x + P(x)e^x$

y est solution de $(E) \Leftrightarrow P''(x) + P'(x) - 2P(x) = x^3 + x^2 + x + 1\ (*)$

P est de degré 3 donc

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P''(x) = 6ax + 2b$

En identifiant les polynômes de $(*)$ on a : $\begin{cases} -2a = 1 \\ 3a - 2b = 1 \\ 6a + 2b - 2c = 1 \\ 2b + c - 2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{4} \\ c = -\frac{13}{4} \\ d = -\frac{27}{8} \end{cases}$

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{13}{4}x - \frac{27}{8}\right)e^x$$

$$S = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{13}{4}x + \frac{27}{8}\right)e^x, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{matrix} \right\}$$