Fiche 5 corrigé

Exercice 1

$$\int_0^4 \frac{1}{1+t}dt = [ln(1+t)]_0^4 = ln5$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^2 = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^3 \frac{2t}{1+t^2}dt = [ln(1+t^2)]_0^3 = ln10$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = [\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt$$

on pose $u(t) = \sin^{2n-1} t$ donc $u'(t) = (2n-1)\cos t \sin^{2n-2} t$

$v'(t) = \sin t$ avec $v(t) = -\cos t$

u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut intégrer par parties et

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt = \left[-\cos t \sin^{2n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{2n-2} t\, dt = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^{2n-2} t\, dt$$

d'où $I_n = (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n$ soit $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$ et $\boxed{I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}}$

On en déduit que $I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)...5\times3\times1}{2n(2n-2)...6\times4\times2} \times \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{(2n-1)(2n-3)...5\times3\times1}{2^n n!} \quad \frac{\pi}{2}$

Et $\boxed{I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$

Exercice 3

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Pour $n = 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^0}{0!} f(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\, dt = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$$

Donc l'égalité est vérifiée au rang 0.

Supposons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

on pose $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ alors $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$

$v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ avec $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

u et v sont de classe C^1 sur $[a, x]$ donc on peut intégrer par parties et

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$
$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$

Donc si l'égalité est vrai au rang *n*, elle l'est au rang $n + 1$.

On a donc montré par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Exercice 4

a. $f(x)=\dfrac{x}{x^4-5x^2+4}$

$x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

donc $\dfrac{x}{x^4-5x^2+4}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{d}{x+2}$

$$a=\left[(x-1)f(x)\right]_{x=1}=\left[\frac{x}{(x+1)(x-2)(x+2)}\right]_{x=1}=\frac{1}{6}$$

$$b=\left[(x+1)f(x)\right]_{x=-1}=\left[\frac{x}{(x-1)(x-2)(x+2)}\right]_{x=-1}=\frac{1}{6}$$

$$c=\left[(x-2)f(x)\right]_{x=2}=\left[\frac{x}{(x-1)(x+1)(x+2)}\right]_{x=2}=\frac{1}{6}$$

$$d=\left[(x+2)f(x)\right]_{x=-2}=\left[\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)}\right]_{x=-2}=\frac{1}{6}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,1,-2,2\},\frac{x}{x^4-5x^2+4}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^4-5x^2+4}dx=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{6}\left[ln\left|\frac{x^2-4}{x^2-1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

Soit $\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^4-5x^2+4}dx=\frac{1}{6}ln5-\frac{1}{3}ln2}$

b. $g(x)=\dfrac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}$

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

$$a=\left[(x-2)g(x)\right]_{x=2}=\left[\frac{x^2}{(x+1)^2}\right]_{x=2}=\frac{4}{9}$$

$$c = \left[(x+1)^2 g(x)\right]_{x=-1} = \left[\frac{x^2}{x-2}\right]_{x=-1} = \frac{1}{3}$$

ce qui donne $\dfrac{x^2}{(x-2)(x+1)^2} = \dfrac{4}{9(x-2)} + \dfrac{b}{x+1} - \dfrac{1}{3(x+1)^2}$

en prenant $x = 0$ on obtient $0 = -\dfrac{2}{9} + b - \dfrac{1}{3}$ soit $b = \dfrac{5}{9}$

donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,2\}, \frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{4}{9(x-2)} + \frac{5}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{9(x-2)} + \frac{5}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}\right)dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{dx}{x-2} + \frac{5}{9}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}\,dx = \frac{4}{9}\left[\ln|x-2|\right]_0^1 + \frac{5}{9}\left[\ln|x+1|\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{4}{9}(\ln 1 - \ln 2) + \frac{5}{9}(\ln 2 - \ln 1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

soit $\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{9}\ln 2 - \frac{1}{6}}$

$$h(x) = \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$a = \left[\frac{2}{(x^2+1)}\right]_{x=-1} = 1$$

$$\frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{2-(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-x+1}{x^2+1}$$

D'où $\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$

$$\int_0^1 \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \left[ln(x+1) - \frac{1}{2}ln(x^2+1) + \arctan x\right]_0^1 = ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 5

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)} = \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

$$a = \left[\frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x + 2)(x^2 + 1)}\right]_{x=2} = \frac{20}{4\times5} = 1$$

$$b = \left[\frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x - 2)(x^2 + 1)}\right]_{x=-2} = \frac{-20}{-4\times5} = 1$$

$$\frac{cx + d}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)} - \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}\right) = \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)} - \frac{2x}{(x^2 - 4)}$$

Soit

$$\frac{cx + d}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4 - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

et $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+1}$

$$\int_0^1 \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= [\boldsymbol{ln}(4 - x^2) + \arctan x]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = ln\frac{3}{4} + \frac{\pi}{4}$$

Exercice 6

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx$$

$x \mapsto \frac{x\, lnx}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $\left[1, +\infty\right[$

$\frac{x\, lnx}{(1+x^2)^2} \sim_{+\infty} \frac{lnx}{x^3} \leq \frac{1}{x^2}$ car $\forall x > 0, \ln x \quad x$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx$ converge.

On pose

$u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$ avec $v(x) = \frac{-1}{2\left(1+x^2\right)}$

u et v sont de classe C^1 sur $\left[1, +\infty\right[$, donc en intégrant par parties

$$I = \left[\frac{-\ln x}{2\left(1+x^2\right)}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} dx$$

$\frac{lnx}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{lnx}{x^2} \to_{+\infty} 0$ (croissances comparées) donc $\left[\frac{-\ln x}{2\left(1+x^2\right)}\right]_1^{+\infty} = 0$

$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^{+\infty} = \left[\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^{+\infty}$

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sim_{+\infty} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

et finalement $\boxed{I = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2} = \frac{1}{4}\ln 2}$