Fiche 3 : nombres complexes

Exercice 1

a. Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} \quad z_2 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

b. Ecrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$z_1 = \frac{3}{1-i} \quad z_2 = (-1+i)^n$

Exercice 2

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+i)^n + (1-i)^n$ est un réel.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+i)^n - (1-i)^n$ est un imaginaire pur.

Exercice 3

Vérifier que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est solution de l'équation $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$ et résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a. $z^2 + (2i-1)z - 1 - i = 0$

b. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$. Cette équation admet-elle une solution pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$? Que peut-on dire des solutions obtenues ?

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^5 = 1$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(1+iz)^5 - (1-iz)^5 = 0$.

Exercice 6

Calculer les sommes $C = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice 7

Développer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos x + i \sin x)^{2n+1}$ et en déduire l'écriture de $cos(2n+1)x$ et $sin(2n+1)x$ en fonction de $cosx$ et $sinx$

Exercice 8

Montrer qu'il existe un complexe α tel que l'équation $z^2 - (2 + i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0$ admette des racines conjuguées.
Résoudre l'équation dans ce cas.

Exercice 9

Soit $z = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

a. Calculer z^2.
b. Déterminer le module et un argument de z^2.
c. En déduire le module et un argument de z.
d. Quelles lignes trigonométriques retrouve-t-on ainsi ?

Exercice 10

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ puis calculer $\sin\frac{\pi}{8}$. On donnera le résultat sous la même forme.
2. Résoudre l'équation : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = 0$ en posant $Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. On donnera les solutions sous une forme algébrique simple.
3. Développer $(z+1)^4 + (z-1)^4$ et résoudre la même équation de façon différente.

Exercice 11

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$, pour tout entier naturel n, l'équation : $(x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1} = 0$.
b. Développer, pour tout entier naturel n, l'expression : $(x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1}$.