Fiche 3 corrigé

Exercice 1

a. $Z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{9+16} = \frac{9+12i+18i-24}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

$$z_2 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{2} = -3$$

b. $z_1 = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = (-1+i)^n = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}$

Exercice 2

$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

$(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$

$(1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) = 2\left(\sqrt{2}\right)^n cos\frac{n\pi}{4}$ qui est réel

$(1+i)^n - (1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} - e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) = 2i\left(\sqrt{2}\right)^n sin\frac{n\pi}{4}$ qui est un imaginaire pur.

Autre méthode :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-i)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k (1+(-1)^k)$$

Si *k* est pair $1+(-1)^k = 2$ et i^k est réel

Si *k* est impair $1+(-1)^k = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (1+i)^n + (1-i)^n$ est un réel.

$$(1+i)^n - (1-i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k - \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-i)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k (1-(-1)^k)$$

Si *k* est pair $1-(-1)^k = 0$

Si *k* est impair $1-(-1)^k = 2$ et i^k est imaginaire

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (1+i)^n - (1-i)^n$ est un imaginaire pur

Exercice 3

1. $(E): z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$

$j^4 - j^3 + j^2 + 2 = j - 1 + j^2 + 2 = j^2 + j + 1 = 0$ (somme des racines cubiques de l'unité)

$\left(j^2\right)^4 - \left(j^2\right)^3 + \left(j^2\right)^2 + 2 = j^8 - j^6 + j^4 - 2 = j^2 - 1 + j + 2 = 0$

donc j et j^2 sont solutions de (E)

ainsi $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = (z - j)\left(z - j^2\right)\left(z^2 + az + b\right) = \left(z^2 + z + 1\right)\left(z^2 + az + b\right)$

$$= z^4 + (a+1)z^3 + (b+a+1)z^2 + (b+a)z + b$$

on a ainsi par identification :

$$\begin{array}{lcl} a+1 = \cancel{1} & & \\ b+a+1 = 1 & \Leftrightarrow & b = 2 \\ b+a = 0 & & a = -2 \\ b = 2 & & \end{array}$$

et $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = (z - j)\left(z - j^2\right)\left(z^2 - 2z + 2\right)$

Résolution de : $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -\cancel{4=}\ 4i^2$ donc $z = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

Finalement $\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sont : } \left\{ j, j^2, 1-i, 1+i \right\}}$

Exercice 4

a. $z^2 + (2i - 1)z - 1 - i \quad \cancel{0}$

$\Delta = (2i-1)^2 + 4(1+i) = 1$ donc les solutions sont : $\boxed{z_1 = \dfrac{1-2i-1}{2} = \quad i \text{ et } z_1 = \dfrac{1-2i+1}{2} = 1 \quad i}$

b. $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$

on pose $Z=z^3$ et on a $Z^2+(2i-1)Z-1-i=0$

d'après a. il nous faut résoudre les équations $z^3=-i$ et $z^3=1-i$

$z^3=-i \Leftrightarrow r^3e^{i3\theta}=e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ 3\theta=-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=-\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$ soit $z\in\left\{e^{-i\frac{\pi}{6}},i,e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right\}$

$z^3=1-i \Leftrightarrow r^3e^{i3\theta}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r=2^{\frac{1}{6}} \\ 3\theta=-\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=2^{\frac{1}{6}} \\ \theta=-\frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$

soit $z\in\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}},2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}},2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{-3\pi}{4}}\right\}$

$z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$ pour $\boxed{z\in\left\{e^{-i\frac{\pi}{6}},i,e^{-i\frac{5\pi}{6}},2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}},2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}},2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{-3\pi}{4}}\right\}}$

Exercice 5

1. $\frac{1+iz}{1-iz}=e^{i\alpha} \Leftrightarrow 1+iz=e^{i\alpha}-ie^{i\alpha}z \Leftrightarrow iz\left(e^{i\alpha}+1\right)=e^{i\alpha}-1$

$=$

   soit $z=\frac{e^{i\alpha}-1}{i(e^{i\alpha}+1)}=\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}{ie^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$ pour $\alpha\neq\pi\ [2\pi]$

   on remarque que les solutions sont réelles.

2. $Z^5=1 \Leftrightarrow Z=e^{ik\frac{2\pi}{5}}, k\in\{0,1,2,3,4\}$

3. $(1+iz)^5-(1-iz)^5=0 \Leftrightarrow (1+iz)^5=(1-iz)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5=1$

   En utilisant les résultats précédents et en posant $Z=\frac{1+iz}{1-iz}$

   On obtient $z=\tan\frac{k\pi}{5}$

   Soit $S=\left\{0,\tan\frac{\pi}{5},\tan\frac{2\pi}{5},\tan\frac{3\pi}{5},\tan\frac{4\pi}{5}\right\}$

Exercice 6

$$C+iS=\sum_{k=0}^{n}\cos kx+i\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\sum_{k=0}^{n}\left(\cos kx+i\sin kx\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^{k}$$

on reconnaît une suite géométrique, donc si $e^{ix}\neq 1$ soit $x\neq 0\left[2\pi\right]$,

$$C+iS=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}-e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire on obtient pour $\underline{x\neq 0\left[2\pi\right]}$:

$$\boxed{C=\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}\quad\text{et}\quad\boxed{S=\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

si $x=0\left[2\pi\right]$, on a directement $C=n+1$ et $S=0$

Exercice 7

$$(cosx+i\ sinx)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}cos^{2n+1-k}x\ \ i^{k}sin^{k}x$$

$i^{2p}=(-1)^{p}$ et $i^{2p+1}=(-1)^{p}i$

Or $cos(2n+1)x+i\ sin(2n+1)x$=$(cosx+i\ sinx)^{2n+1}$

Donc, en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\boxed{\begin{aligned}cos(2n+1)x&=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p}C_{2n+1}^{2p}cos^{2n+1-2p}x\ \ sin^{2p}x\\ sin(2n+1)x&=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p}C_{2n+1}^{2p+1}cos^{2n-2p}x\ \ sin^{2p+1}x\end{aligned}}$$

Exercice 8

L'équation $z^2-(2+i\alpha)z+i\alpha+2-\alpha=0$ admet des racines conjuguées si et seulement si les coefficients $2+i\alpha$ et $i\alpha+2-\alpha$ sont réels ce qui est le cas quand $\alpha=0$

$$z^2-2z+2=0 \quad \Leftrightarrow (z-1)^2+1=0 \Leftrightarrow (z-1)^2-i^2 \Leftrightarrow (z-1-i)(z-1+i)=0$$

Donc les solutions sont $z=1+i$ et $z=1-i$

Exercice 9

$z=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

a. $z^2=\left(\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2+2i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

soit $\boxed{z^2=8\sqrt{3}+8i}$

b. $\left|z^2\right|^2=64\times 3+64=64\times 4 \Rightarrow \boxed{\left|z^2\right|=8\times 2=16}$

$z^2=8\sqrt{3}+8i=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=16e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{\arg\left(z^2\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]}$

c. $\left|z^2\right|=16 \Rightarrow \boxed{|z|=4}$

$\arg\left(z^2\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{12}[\pi]$

Or Re $z\geq 0$ et Im $z\geq 0$, donc $\boxed{\arg(z)=\frac{\pi}{12}}$

d. Finalement $z=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

soit $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

Exercice 10

1. Sachant que $\boldsymbol{cos^2 a = \frac{1+cos2a}{2}}$ et $\boldsymbol{sin^2 a = \frac{1-cos2a}{2}}$, on a :

$cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ donc $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2. Soit à résoudre l'équation : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = 0$

Pour $z \neq 1$ et $z \neq -1$ on pose $Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

Alors l'équation devient : $Z^2 + \frac{1}{Z^2} = 0 \Leftrightarrow Z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^4 = -1$

$\boldsymbol{Z^4 = -1 \Leftrightarrow e^{i4\alpha} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 4\alpha = \pi[2\pi] \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\}}$

Donc $Z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou $Z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $Z = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Il reste à résoudre $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\alpha_k}$

Soit $z + 1 = e^{i\alpha_k}(z-1) \Leftrightarrow z\left(1 - e^{i\alpha_k}\right) = -1 - e^{i\alpha_k} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\alpha_k}+1}{e^{i\alpha_k}-1} = \frac{e^{i\frac{\alpha_k}{2}}+e^{-i\frac{\alpha_k}{2}}}{e^{i\frac{\alpha_k}{2}}-e^{-i\frac{\alpha_k}{2}}} = \frac{cos\frac{\alpha_k}{2}}{isin\frac{\alpha_k}{2}}$

Donc $\boxed{z = -i\frac{cos\frac{\alpha_k}{2}}{sin\frac{\alpha_k}{2}}\ pour\ k \in \{0,1,2,3\}}$

Soit $z = -i\frac{cos\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}}$ ou $z = i\frac{cos\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}}$ ou $z = -i\frac{cos\frac{3\pi}{8}}{sin\frac{3\pi}{8}}$ $z = i\frac{cos\frac{3\pi}{8}}{sin\frac{3\pi}{8}}$

D'après la question précédente $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Donc $\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$z = -i\frac{cos\,\frac{\pi}{8}}{sin\,\frac{\pi}{8}} = -i\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -i\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}} = -i\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -i\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$z = i\frac{cos\,\frac{\pi}{8}}{sin\,\frac{\pi}{8}} = i\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$z = -i\frac{cos\,\frac{3\pi}{8}}{sin\,\frac{3\pi}{8}} = -i\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$z = i\frac{cos\,\frac{3\pi}{8}}{sin\,\frac{3\pi}{8}} = i\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Les quatre solutions de l'équation sont donc : $-i\left(\sqrt{2}+1\right), i\left(\sqrt{2}+1\right), -i\left(\sqrt{2}-1\right), i\left(\sqrt{2}-1\right)$

3. $(z+1)^4 + (z-1)^4 = 2(z^4 + 6z^2 + 1)$

   Résoudre l'équation : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = 0$ revient à résoudre $z^4 + 6z^2 + 1 = 0$
   On pose $X = z^2$ et on résout l'équation $X^2 + 6X + 1 = 0$
   $\Delta = 36 - 4 = 32$
   $\mathrm{X} = \frac{-6+\sqrt{32}}{2} = -3 + 2\sqrt{2} = \mathrm{i}^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = \mathrm{i}^2\left(1-\sqrt{2}\right)^2$
   ou $X = -3 - 2\sqrt{2} = \mathrm{i}^2\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = \mathrm{i}^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$
   ce qui nous donne :

   $z = i\left(1-\sqrt{2}\right)$ ou $z = -i\left(1-\sqrt{2}\right)$ ou $z = i\left(1+\sqrt{2}\right)$ ou $z = -i\left(1+\sqrt{2}\right)$

Et on retrouve les résultats précédents

Exercice 11

a. $(E) \Leftrightarrow (x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1} = 0 \Leftrightarrow (x+i)^{2n+1} = (x-i)^{2n+1}$

comme i n'est pas solution de (E),on a

$$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+i}{x-i} = e^{i\frac{k2\pi}{2n+1}}, k \in \{0,1,...,2n\}$$

$$\frac{x+i}{x-i} = e^{i\frac{k2\pi}{2n+1}} \Leftrightarrow x+i = e^{i\frac{k2\pi}{2n+1}}(x-i) \Leftrightarrow x\left(1-e^{i\frac{k2\pi}{2n+1}}\right) = -i\left(e^{i\frac{k2\pi}{2n+1}}+1\right)$$

pour $k \neq 0$, $x = \dfrac{i\left(e^{i\frac{k2\pi}{2n+1}}+1\right)}{e^{i\frac{k2\pi}{2n+1}}-1} = \dfrac{i\left(e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}+e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}-e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}} = \dfrac{\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}} = \cot an\dfrac{k\pi}{2n+1}$

si $k=0$, l'équation $\dfrac{x+i}{x-i} = 1$ n'admet pas de solution

Finalement l'équation (E) admet $2n$ solutions réelles données par

$$\boxed{x_k = \cot an\frac{k\pi}{2n+1}, k \in \{1,...,2n\}}$$

b.

$$(x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^{2n+1-k} i^k - \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^{2n+1-k} (-1)^k i^k = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^{2n+1-k} i^k \left(1-(-1)^k\right)$$

si k est pair, $1-(-1)^k = 0$

si k est impair, $1-(-1)^k = 2$ et

$$(x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1} = 2\sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p+1} x^{2n+1-(2p+1)} i^{2p+1} = 2i\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_{2n+1}^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

$$\boxed{(x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1} = 2i\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_{2n+1}^{2p+1} x^{2(n-p)}}$$