Fiche2 corrigé

Exercice 1

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{7\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\cos\frac{5\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5\theta}{2} = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{5}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta = \pi[2\pi]$$

les solutions de cette équation sur $[-\pi,\pi]$ sont : $\boxed{\left\{-\frac{3\pi}{5}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \pi\right\}}$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{7\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{7\theta}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta=\pi[2\pi]$$

$$\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{5\theta}{2}=0[\pi] \ \Leftrightarrow \theta=0\left[\frac{2\pi}{5}\right]$$

les solutions de cette équation sur $[-\pi,\pi]$ sont : $\left\{-\frac{4\pi}{5},-\frac{\pi}{2},-\frac{2\pi}{5},0,\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{5}\right\}$

Exercice 2

$\sin 2a = 2\sin a\cos a \Rightarrow \cos a = \dfrac{\sin 2a}{\sin a}$ si $\sin a \neq 0$.

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\times\frac{\sin\frac{x}{2^2}}{2\sin\frac{x}{2^3}}\times\ldots\times\frac{\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{x}{2^{n-1}}}\times\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

dons si $\forall k\in\{1,2,\ldots,n\},\frac{x}{2^n}\neq 0[\pi]$, on obtient après simplification :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}}$$

Exercice 3

a. $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$ car la somme des racines (ici cinquièmes) de l'unité est nulle.

Donc on a aussi $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=0$ soit $\boxed{1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0}$

b. $\cos\frac{4\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1$ donc

$$1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)=0 \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5}+\ 2\cos\frac{2\pi}{5}-1\quad 0.$$

Donc $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} \text{ est solution de l'équation } 4x^2+2x-1 \quad \cancel{0}}$

Résolution de cette équation : $\Delta = 4+16 = 20$ donc $x = \frac{-2\pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

Or $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ donc $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

c. $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 = 2\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16} - 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} - 1 \quad \frac{-2-2\sqrt{5}}{8}$

soit $\boxed{\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$

$\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$ car $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$

Exercice 4

$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$

f est dérivable sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en tant que composée de fonctions dérivables sur ces intervalles.

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \quad 0$$

Il en résulte que f est constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\times\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{x > 0, \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$

$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(\ \ 1) = 2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{x < 0, \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \ \frac{\pi}{2}}$