Fiche 1 corrigé

Exercice 1

Soit la propriété $P(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

a) $P(0)$ est vraie car $\sum_{k=0}^{0} k \times k! = 0 \times 0! = 0 = (0+1)! - 1$

b) supposons $P(n)$ vraie .

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=0}^{n} k \times k! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)!(n+1+1) - 1$$

soit $\sum_{k=0}^{n+1} k \times k! = (n+2)! - 1$.

on a montré que $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie

conclusion : on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

Exercice 2

Soit la propriété $P(n)$:$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

a) $P(1)$est vraie car $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\frac{1 \times 4}{4}$=1

b) supposons $P(n)$ vraie .

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

on a montré que $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie

conclusion : on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2\times 4\times \ldots \times n}{3\times 5\times \ldots \times (2n+1)} = \frac{\left(2^n \times n!\right)^2}{3\times 5\times \ldots \times (2n+1)\times 2\times 4\times \ldots \times n}$$ soit $\boxed{A_n = \dfrac{2^{2n}\left(n!\right)^2}{(2n+1)!}}$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n!}$$

soit $\boxed{B_n = 1 - \dfrac{1}{n!}}$

$$C_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{C_n^{k+1} + C_n^k}{C_n^{k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^{k+1}}$$ or

$$\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^{k+1}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{(n+1)!(n-k-1)!}{n!(n-k)!} = \frac{n+1}{n-k}$$ donc $\boxed{C_n = \prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{n+1}{n-k} = \dfrac{(n+1)^n}{n!}}$

Exercice 4

a) $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

b) On prend $x = 1$ donc $f(1) = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ et $\boxed{S_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n}$

On prend $x = -1$ donc $f(-1) = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$ et $\boxed{S_0' = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0}$

$$S_0'' = \sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots.$$

$$S_0 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + \ldots.$$

$$S_0' = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots.$$

soit $S_0 + S_0' = 2S_0'' = 2^n$ et $\boxed{S_0'' = 2^{n-1}}$

c) f étant une fonction polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant les deux membres on obtient : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$

On prend $x = 1$ donc $f'(1) = n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k 1^{k-1}$ et $\boxed{S_1 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}}$

d) f 'est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = (n-1)n(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} (k \quad 1)kC_n^k x^{k-2}$

On prend $x = 1$ donc $f''(1) = (n-1)n(1+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} (k \quad 1)kC_n^k 1^{k-2}$

D'où $(n-1)n2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k - \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = S_2 \quad S_1$

Donc $S_2 = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}$ et

$$\boxed{S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}}$$