FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Exercice 1

Soit h la fonction définie par : $h(x, y) = \ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

Montrer que l'ensemble de définition D de h est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie par : $g(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ si $(x, y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 1$.

1) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
2) Montrer que g est continue en $(0,0)$.
3) Etudier l'existence de dérivées partielles d'ordre 1 de g en $(0,0)$.

Exercice 3 (EDHEC 2005 voie E)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$.

On admettra que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2) Montrer que f admet un seul point critique A.
3) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
4) En déduire que f admet un extremum local au point A. Préciser sa nature et sa valeur.
5) Démontrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \geq xe^x$.
6) En étudiant la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^x$, montrer que f admet en A un extremum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (d'après Ecricome 99 voie E)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 - x + xy^2 - xy$.

1) Déterminer les points critiques de f.
2) Déterminer les extremums locaux de f.
3) Montrer que la fonction f admet un minimum local au point $\left(\dfrac{5}{8}, \dfrac{1}{2}\right)$. Calculer la valeur de ce minimum.
4) Montrer que ce minimum local est un minimum absolu sur l'ouvert $U = \left]\dfrac{5}{8}, +\infty\right[\times \mathbb{R}$. On pourra pour cela calculer $f\left(\dfrac{5}{8} + h, \dfrac{1}{2} + k\right)$.
5) Calculer $f(-1,-2)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 (d'après ESSEC 2000 voie E)

Une entreprise produit des biens B dont la fabrication nécessite :

- un certain volume d'heures de travail désigné par x dans la suite ($x > 0$).
- un certain volume d'équipements désigné par y dans la suite ($y > 0$).

On suppose que la quantité de biens B produits avec un volume d'heures de travail x et un volume d'équipements y est : $f(x, y) = x^a y^b$ où a et b sont des réels vérifiant $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

On suppose enfin que le coût horaire du travail est égal à u ($u > 0$) et le coût unitaire des équipements est égal à v ($v > 0$) de sorte que le coût de la production à volumes de travail et d'équipements x et y donnés est : $g(x, y) = ux + vy$.

Partie A : Etude d'un cas particulier

On suppose (seulement dans cette question) que $a = b = \dfrac{1}{2}$, $u = 4$ et $v = 1$.

1) Construire (en justifiant) sur une même figure (unité 2 cm) les ensembles de points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
   - E_1 : $x > 0$, $y > 0$ et $f(x, y) = 2$.
   - E_2 : $x > 0$, $y > 0$ et $g(x, y) = 8$.
   - E_3 : $x > 0$, $y > 0$ et $g(x, y) = 10$.
2) Déterminer les points d'intersection de E_1 avec E_2 et E_3. Interpréter ces points d'intersection en termes de production et de coût de production.
3) Pour une production égale à 2, quel est le coût minimal K envisageable ?
4) Pour un coût égal à 8, quelle est la quantité produite maximale Q envisageable ?

Partie B : Optimisation de la quantité produite à niveau de coût donné

On étudie dans cette question la maximisation de la quantité produite $Q = f(x, y)$ en supposant que le coût de production $g(x, y) = K$ est donné.

1) Montrer que ce problème équivaut à maximiser la fonction définie par : $F(x) = f\left(x, \dfrac{K - ux}{v}\right)$ pour $0 < x < \dfrac{K}{u}$.
2) Calculer $F'(x)$ et montrer que $F'(x)$ est du signe de $Ka - (a + b)ux$.
3) En déduire les variations de F et les valeurs de x et y qui permettent d'optimiser la quantité produite $Q = f(x, y)$ sous la contrainte de coût $g(x, y) = K$.
4) En déduire que la quantité produite optimale Q pouvant être obtenue sous la contrainte de coût $g(x, y) = K$ est de la forme $Q = cK^{a+b}$ où c est une constante dépendant de a, b, u et v que l'on explicitera. On précisera la forme particulière du résultat obtenu lorsque $a + b = 1$.

Partie C : Optimisation du coût à niveau de production donné

On étudie dans cette question la minimisation du coût de production $K = g(x, y)$ en supposant que la quantité à produire $f(x, y) = Q$ est donnée.

1) Montrer que ce problème équivaut à minimiser la fonction définie par : $G(x) = g\left(x, \dfrac{Q^{1/b}}{x^{a/b}}\right)$ pour $x > 0$.
2) Etudier les variations de G et les valeurs de x et y qui permettent d'optimiser le coût de production $K = g(x, y)$ sous la contrainte $f(x, y) = Q$.
3) En déduire que le coût optimal K pouvant être obtenu sous la contrainte de production $f(x, y) = Q$ est de la forme $K = dQ^{1/(a+b)}$ où d est une constante dépendant de a, b, u et v que l'on explicitera. On précisera la forme particulière du résultat obtenu lorsque $a + b = 1$.
4) Comparer les résultats des parties B et C.

Exercice 6 (EDHEC 1999 voie E)

Pour tout $a \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}, 0\right\}$, on considère la fonction f_a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2)e^y$$

1) a) Calculer les dérivées partielles premières de f_a.

   b) En déduire que f_a possède deux points critiques et donner leurs coordonnées.
2) Calculer les dérivées partielles secondes de f_a.
3) a) Examiner, pour chacun des points critiques, à quelle condition portant sur a, f_a présente en ces points un extremum local.

b) Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R}^2$ un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a.

Exercice 7 (EM Lyon 2004 voie E)

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.
La proportion de boules blanches est b, la proportion de boules rouges est r et la proportion de boules vertes est v. On a donc : $0<b<1$, $0<r<1$, $0<v<1$ et $b+r+v=1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur. Pour chaque entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i et V_i) l'événement « la i-ème boule tirée est blanche (respectivement rouge et verte) ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Par exemple, si le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, alors la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie A

1) Préciser les valeurs possibles de X.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\} \quad P(X=k)=(1-b)b^{k-1}+(1-r)r^{k-1}+(1-v)v^{k-1}$.
3) Montrer que X possède une espérance et que : $E(X)=\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1-r}+\dfrac{1}{1-v}-2$.

Partie B

On considère la fonction de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\ ]0,1[\times]0,1[\quad f(x,y)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}$$

1) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\ ]0,1[\times]0,1[$.
2) Montrer qu'il existe un seul point I de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.
3) Montrer que f admet en I un minimum local.
4) Exprimer $E(X)$ en fonction de b et de r. Que peut-on dire de $E(X)$ lorsque $b=r=v=\dfrac{1}{3}$?