Réponses et Indications (Intégration)

Exercice 1

1) $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln 2$.
2) et 3) Suite décroissante minorée par 0.
4) $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
5) Utiliser le sens de variations de (I_n) et, pour l'équivalent, encadrer $2nI_n$.
6) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. Puis sommer de 0 à *n*. On obtient : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.
7) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$. Puis sommer de 0 à *n*. On obtient : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n+1} = \ln 2$.

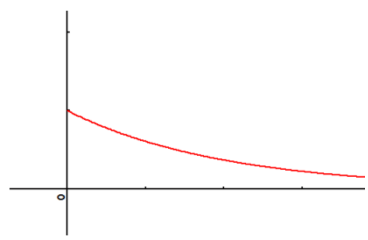
Exercice 2

1) a) Utiliser la concavité de $x \mapsto \sin x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   b) En déduire un encadrement de $t^2 \cos^{2k} t$ et intégrer.
   c) Intégration par parties.
   d) Utiliser le b). Ne pas oublier de démontrer que $I_k > 0$ avant de diviser.
2) a) $I_k = k(2k-1)J_{k-1} - 2k^2 J_k$.
   b) Diviser par I_k et utiliser le 1) c).
   c) $J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$ et $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
3) a) Sommer de 1 à *n* l'égalité du 2) b).
   b) Séparer $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{k^2}$ en deux sommes : les termes pairs et les termes impairs.
   c) Séparer $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$ en deux sommes : les termes pairs et les termes impairs.

Exercice 3

Partie A

1) Opérations sur des fonctions continues sur $]0,+\infty[$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.
2) a) Opérations sur des fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Et dériver.
   b) Utiliser un $DL_2(0)$: $A(x) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
   c) Théorème de prolongement de la dérivée.
   d) *A* est négative car strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et $A(0) = 0$.
   e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln x$.
3) a) Opérations sur des fonctions deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$. Et dériver.
   b) *B* est positive car elle est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $B(0) = 0$.



Partie B

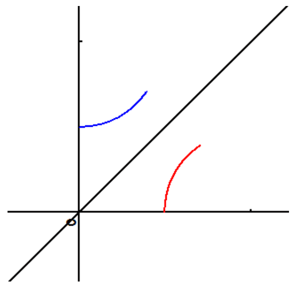
1) Somme des termes d'une suite géométrique.
2) Intégrer entre 0 et x.
3) Majorer $\dfrac{1}{1+t}$, puis intégrer.
4) Remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ et utiliser le 2) et la majoration.

Partie C

1) Démontrer sur $]0,1]$ et pour $x=0$.
2) En déduire un encadrement de $\displaystyle f(x)-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$, puis intégrer entre 0 et 1.
3) Séparer les termes pairs et les termes impairs dans $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2}$ et dans $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
4) Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 4

Partie A



1) Théorème de bijection de I dans $J=[1,\sqrt{2}]$.
2) Les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
3) Dérivée d'une fonction réciproque. La fonction est dérivable sauf en 1 car $f'[f^{-1}(1)]=0$.

   Montrer que : $\cos[f^{-1}(x)]=\dfrac{1}{x}$ et $\sin[f^{-1}(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$.
4) $f^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})+o(x-\sqrt{2})$.

Partie B

1) Opérations sur des fonctions de classe C^∞ sur I.
2) Récurrence. La relation du 3) est obtenue dans l'hérédité.
3) $P_1(X)=X$ $\quad P_2(X)=X^2+1$ $\quad P_3(X)=X^3+5X$
4) Récurrence. P_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

Partie C

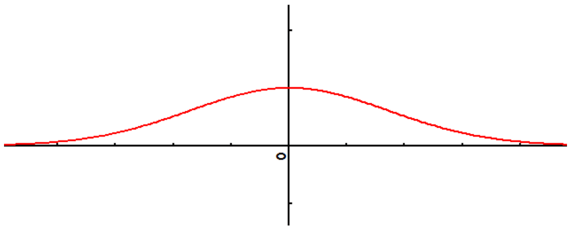
1) Continuité de f^n sur I. Et $I_2=1$.
2) $a=b=\dfrac{1}{2}$.
3) $I_1=\ln(\sqrt{2}+1)$.
4) Suite croissante.
5) Utiliser la relation de Chasles et la positivité pour la première inégalité. Pour la deuxième, utiliser le sens de variations de $x\mapsto\cos x$.
6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=+\infty$. Montrer que $\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\sim\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

   Attention aux équivalents ! $u_n\sim v_n$ ne prouve pas $u_n^n\sim v_n^n$.
7) Intégration par parties.

Exercice 5

1) a) Utiliser $\sqrt{1+t^4} \geq 1$.
   b) Fonction paire.
   c) $x \mapsto xf(x)$ est primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
   d) La fonction *f* est décroissante. Majorer $t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ sur $[0,x]$.
2) a) Utiliser en 0^+ les encadrements du 1), puis en 0^- la parité.
   b) Etudier le sens de variations, puis le signe de deux fonctions auxiliaires.
   c) Appliquer l'inégalité à $u = t^4$, et en déduire un encadrement de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ sur $]0,+\infty[$, puis sa limite en 0^+. Utiliser la parité en 0^-.
   d) Théorème de prolongement de la dérivée.
3) a) $h\left(\dfrac{1}{x}\right) = -h(x)$ si $x > 0$.
   b) Exprimer $f(x)$ en fonction de $h(x)$.
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Chercher la limite de $\dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ par changement de variable.
4) Initialiser $s := 0$ et faire une boucle de $k := 0$ à 1000 avec $x := k/1000$ et $s := s + 1/\mathrm{sqrt}(1 + x*x*x*x)$. Afficher la valeur de $s/1000$.
   On obtient : $f(1) \approx 0{,}92789083311$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
f'	$-$
f	1 $\searrow$ 0



La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 6

Partie A

1) Intégrer deux fois par parties en dérivant le polynôme.
2) Pour la première égalité, factoriser le quotient par $\dfrac{e^{imt/2}}{e^{it/2}}$. Montrer que la deuxième est la partie réelle de la première.
3) Intégrer par parties en dérivant *u*, puis majorer $|u'|$ sur $[0,\pi]$.
4) Opérations sur les fonctions de classe C^1 sur $]0,\pi]$ et chercher un $DL_2(0)$.
5) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}\,dt$ (raisonner sur $]0,\pi]$ et en 0).
   Utiliser ensuite les formules de trigonométrie, puis le 3).

Partie B

1) Séries à termes positifs majorées par une série convergente.
2) $S(0) = 0$ et $S(1) = 1$.
3) Opérations sur les sommes de séries absolument convergentes.
   Minorer $(n+x)(n+y)$ par n^2. Montrer que $\lim\limits_{y\to x} S(y) = S(x)$.
4) Même méthode. $S'(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $S'(1) = \dfrac{\pi^2}{6} - 1$.

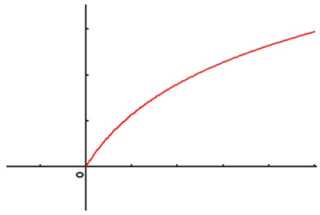
5) a) $\int_1^A \varphi(t)dt = \ln\left(\frac{A}{A+x)}\right) + \ln(1+x)$. Donc $I = \ln(1+x)$.

b) Utiliser le sens de variations de φ.

c) Sommer de 1 à m et faire tendre m vers l'infini après un changement d'indice.

d) Montrer que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

x	0 1 $+\infty$
S'	$\pi^2/6$ $+$
S	0 ↗ 1 $+\infty$



Exercice 7

1) a) Fonction strictement croissante.

b) Minorer t^2 par t sur $[1,+\infty[$. Séparer les cas $n=0$ et $n \geq 1$.

c) Théorème de bijection.

2) a) Utiliser l'intervalle de définition de x_n.

b) Encadrer e^{t^2}, et en déduire un encadrement de $g_n(x_n) = 1$.

3) a) Utiliser l'encadrement.

b) Montrer $x_n \sim n$ et utiliser $e^{-x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Chercher la limite du quotient par encadrement.
Attention aux équivalents : $y_n \sim z_n$ ne prouve pas $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - z_n) = 0$.

Exercice 8

1) a) Intégrer trois fois par parties en dérivant le polynôme. Montrer que $\left|g(x)+\frac{x}{6}\right| \leq \frac{x^2}{6}$.

Cette question se résout facilement avec les développements limités.

b) Utiliser une primitive G de g.

c) Exprimer $\sin t$ en fonction de $g(t)$

2) Effectuer le changement de variable $u = -t$. Séparer le cas $x = 0$.

3) a) Exprimer f à l'aide d'une primitive de g. $f'(x) = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^2}$ si $x \neq 0$.

b) Théorème de prolongement de la dérivée : $f'(0) = 0$.

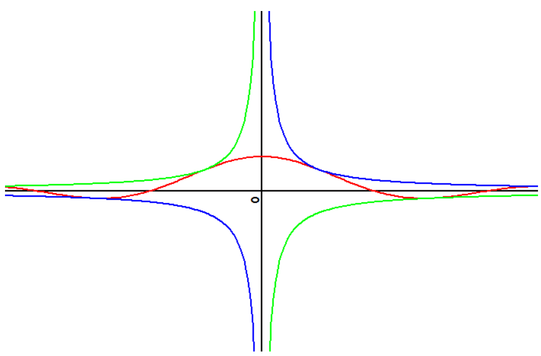
c) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]2k\pi,(2k+1)\pi[\quad f'(x) < 0$ et $\forall x \in](2k+1)\pi, 2(k+1)\pi[\quad f'(x) > 0$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Majorer $|\sin t|$ par 1.

5) a) Utiliser le signe de $\sin t$ sur chaque intervalle.

b) Utiliser la relation de Chasles et le le changement de variable $u = t - \pi$.

x	0 π 2π
f'	0 $-$ 0 $+$ 0
f	$\ln 2$ ↘ $f(\pi)$ ↗ $f(2\pi)$



Exercice 9

1) $g_n(1) = \frac{1}{n}$. Utiliser un développement limité en 0 de $h \mapsto (1+h)^\alpha$.

2) a) Somme des termes d'une suite géométrique.

   b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$. Majorer l'expression du a) par t^n sur $[0,1[$ et en 1, puis intégrer.

   c) Dans le changement de variable, séparer $[0,1[$ et 1.

3) a) $\varphi_k(1) = 0$ si $k \geq 2$ et $\varphi_1(1) = 0$.

   b) $\lim_{x\to 0} J_k(x) = (-1)^k k!$. Utiliser une intégration par parties dans l'hérédité.

4) Inégalité à l'ordre 1 entre 0 et x : f est de classe C^∞ et $\forall x \in]-\infty,0]$ $|f''(x)| \leq 3$.

5) Montrer que : $\forall t \in]0,1[$ $\left| g_n(t) - \dfrac{1}{n}\varphi_1(t) \right| \leq \dfrac{3}{2n^2}\varphi_2(t)$ en utilisant l'inégalité du 4), puis le vérifier en 1, puis intégrer entre $x \in]0,1]$ et 1, et faire tendre x vers 0.

6) $v_n \sim \dfrac{1}{n} I$ et $u_n - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{1}{n^2} I$.

Exercice 10

Partie A

1) a) et b) $u_0 = \ln 3 - \ln 2$ $\quad u_1 = \dfrac{1}{2}\ln 3$ $\quad u_2 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

   c) Suite croissante.

   d) Convergence monotone.

   e) Ecrire : $\ln 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$.

   f) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ par encadrement.

2) a) φ_n est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

   b) Minorer $1+t+t^n$ par t^2 sur $[1,+\infty[$.

   c) Limite monotone d'une fonction.

   d) Minorer $1+t+t^n$ par t^n sur $[1,+\infty[$, puis encadrer $\varphi_n(x)$ et faire tendre x vers l'infini. Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

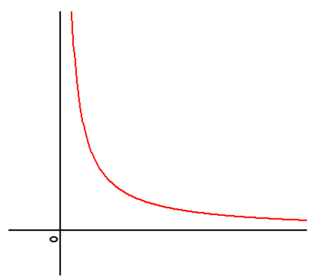
3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n} = \ln 2$.

Partie B

1) Utiliser la caractérisation de la partie entière : $n \leq x < n+1$.
2) Limite monotone.
3) Fonction décroissante sur $]0,+\infty[$.
4) $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x} = \dfrac{1}{t(1+t^x)}$. Pour b), intégrer entre 1 et $a \geq 1$, puis faire tendre a vers $+\infty$.
5) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Même méthode pour comparer $f(x)$ avec l'intégrale précédente.
6) Même méthode. Majorer $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} - \dfrac{1}{t(1+t^x)}$ par $\dfrac{1}{t^{x+2}}$.

   Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$ 0



Exercice 11

1) a) Fonction strictement croissante sur $[0,+\infty[$: $f'_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{nx+1}$.
   b) Utiliser $\forall t \in [0,+\infty[\quad nt \geq 0$.
   c) Limite monotone.
2) a) Utiliser $\forall t \in [1,+\infty[\quad nt \geq n$.
   b) Montrer d'abord l'existence de w_n par limite monotone.
   c) Minorer e^{-t} sur $[0,1]$.
   d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3) a) $\forall t \in]0,1] \quad g(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ et $g(0)=1$.
   b) Comparer la fonction à la fonction g sur $]0,1]$ et en 0, puis intégrer.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) - I \leq v_n \leq \ln(n+1)$.
   d) $u_n \sim \ln n$. Attention aux équivalents : $a_n \sim b_n$ ne prouve pas $\ln a_n \sim \ln b_n$.

Exercice 12

1) Opérations sur les fonctions de classe C^∞ et récurrence.
2) $\forall x \in I \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k + \frac{(2n)!}{(n!)^2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \left(\frac{x-t}{1-4t} \right)^n dt$.
3) Fonction décroissante sur *I*, donc à valeurs dans $[0, x]$.
4) Raisonner par récurrence.
5) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k = f(x)$.

Exercice 13

Partie A

1) Changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.
2) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
3) Remarquer : $\cos^{n+2} x = (\cos^{n+1} x)(\cos x)$.
4) Suite décroissante.
5) Ne pas oublier de justifier que $I_n \neq 0$.
6) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
7) Utiliser le 5) et le 6).
8) Récurrence.
9) Utiliser le 6) et le 8).
10) Utiliser l'équivalent de I_{2n+1}.

Partie B

1) $J_n = n\ln n - n + 1$.
2) a) Utiliser la position de la courbe par rapport à la corde $[k, k+1]$.
   b) Utiliser la position de la courbe par rapport à la tangente en *k*.
   c) Utiliser la position de la courbe par rapport à la tangente en $k+1$.
   d) $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{2}[\ln(k+1) + \ln k] \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \ln x\, dx \leq \frac{1}{2}[\ln(k+1) + \ln k] + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

3) Sommer l'inégalité de 1 à $n-1$.
4) La suite (u_n) est croissante et majorée. Exprimer un équivalent de $n!$ en fonction de la limite de u_n. Puis utiliser le A-10).

Partie C

1) Comparer $\dfrac{1}{1+x}$ et $\dfrac{1}{1-x}$ avec 1.
2) Appliquer le 1) à $\dfrac{t}{n}$ sur $[0,n[$. Traiter ensuite le cas $t=n$.
3) Appliquer le 2) à t^2, puis intégrer entre 0 et $\sqrt{n}$.
4) $v_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u\, du$ et $w_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} u\, du$.
5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Utiliser la partie entière de x^2.
7) Effectuer le changement de variable $u=-t$.
8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.