INTEGRATION

Exercice 1

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Etudier le sens de variations de la suite (I_n).
3) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
4) Calculer $I_{n+2} + I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de la suite (I_n).
5) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} \leq \dfrac{1}{2n+2} \leq I_n$. En déduire que : $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.
6) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n I_{2n}$.
   a) Calculer $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.
7) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2(-1)^n I_{2n+1}$.
   a) Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et calculer sa somme.

Exercice 2 (ESSEC 2001 voie S et EM Lyon 2010 voie S)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales : $I_k = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(t)\, dt$ et $J_k = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2k}(t)\, dt$.

1) a) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad t \leq \dfrac{\pi}{2} \sin(t)$.
   b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq J_k \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.
   c) En remarquant que $I_{k+1} = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{2k+1}(t)\, dt$, montrer que $(2k+2) I_{k+1} = (2k+1) I_k$.
   d) Déduire des questions précédentes que : $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{J_k}{I_k} = 0$.
2) a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k pour tout entier $k \geq 1$.
   b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$: $\dfrac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \dfrac{J_k}{I_k} = \dfrac{1}{2k^2}$.
   c) Calculer J_0 et I_0.
3) a) En déduire la convergence de la série $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$ et montrer que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
   b) En déduire la convergence de la série $\left(\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$ et montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

c) En déduire la convergence de la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ et montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 3 (EM Lyon 2007 voie S)

On considère l'application *f* de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Partie A : Etude de l'application *f*

1) Montrer que *f* est continue sur $[0,+\infty[$.

2) Soit *A* l'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

a) Montrer que *f* est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$

.

b) Montrer que f' admet comme limite $-\frac{1}{2}$ en 0 à droite.

c) Démontrer que *f* est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

d) Dresser le tableau de variations de *A*. En déduire que *f* est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

e) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

3) Soit *B* l'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$

.

a) Montrer que *f* est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de *B*. En déduire que *f* est convexe sur $]0,+\infty[$.

4) Tracer l'allure de la courbe représentative de *f*.

Partie B : Un développement en série

1) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$.

2) En déduire que : $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt$

.

3) On pose : $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt$. Etablir que : $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad |J_N(x)| \le \frac{x^{N+2}}{N+2}$.

4) En déduire que si $x \in [0,1]$, la série $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

.

Partie C : Egalité d'une intégrale et d'une somme de série

1) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \le \frac{x^{N+1}}{N+2}$.

2) Montrer que la série $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2}+\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2}-\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}$$

4) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 4 (Ecricome 2004 voie S)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

Partie A : Etude de la bijection réciproque de f

1) Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque de f.
2) Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J-\{1\}$ et que : $\forall x\in J-\{1\}\quad (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
4) En déduire le développement limité de f^{-1} à l'ordre 1 en $\sqrt{2}$.

Partie B : Etude des dérivées successives de f

1) Justifier que f est de classe C^∞ sur I. On note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I.
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x\in I\quad f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}x}$.
3) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad P_{n+1}=(1-X^2)P'_n+(n+1)XP_n$ et déterminer les polynômes P_1, P_2 et P_3.
4) Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Partie C : Etude d'une suite d'intégrales

On définit la suite réelle (I_n) par : $I_0=\dfrac{\pi}{4}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}[f(x)]^n dx$.

1) Justifier que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est bien définie. Calculer I_2.
2) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall t\in\mathbb{R}-\{-1,1\}\quad \dfrac{1}{1-t^2}=\dfrac{a}{1-t}+\dfrac{b}{1+t}$.
3) En posant $t=\sin x$, déterminer I_1.
4) Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
5) Montrer que : $\forall n\geq 2\quad I_n\geq\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^n x}dx\geq\frac{1}{n^2\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$.
6) En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
7) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad I_{n+2}=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}I_n$.

Exercice 5 (EM Lyon 1995 voie S)

Soit f la fonction définie par : $f(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

1) Etude globale de f sur $\mathbb{R}^*$.
   a) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[\quad 0\leq f(x)\leq 1$.

b) En utilisant le changement de variable $u=-t$, étudier la parité de *f*.

c) Montrer que *f* est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et : $\forall x\in]0,+\infty[\quad xf'(x)=-f(x)+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

d) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[\quad \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\leq f(x)$. En déduire le sens de variations de *f* sur $]0,+\infty[$.

2) Etude locale de *f* en 0.

a) Montrer que *f* est continue en 0.

b) Montrer que : $\forall u\in]0,+\infty[\quad 0\leq \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}-1+\dfrac{1}{2}u\leq \dfrac{3}{8}u^2$.

c) En déduire que *f* est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

d) Montrer que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) Etude de *f* en $+\infty$.

a) Soit h la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\quad h(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. En utilisant le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$, trouver une relation entre $h(x)$ et $h\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x>0$.

b) En déduire que : $\forall x\in]0,+\infty[\quad xf(x)+\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2f(1)$.

c) En déduire la limite de *f* en $+\infty$.

4) Ecrire un programme en Turbo-Pascal de calcul de $f(1)$ par la méthode des rectangles en prenant $n=1000$.

5) Donner l'allure de la courbe représentative de *f*.

Exercice 6 (EM Lyon 2005 voie S)

Partie A : Calcul de la somme d'une série convergente

1) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}$

2) Etablir que: $\dfrac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it}=\dfrac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{\frac{i(m+1)t}{2}}$, puis : $\displaystyle\sum_{n=1}^m\cos(nt)=\frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$

, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in]0,\pi]$.

3) Soit $u\ :\ [0,\pi]\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,dt=0$.

4) Soit *f* l'application définie par : $f(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\frac{t}{2}}$ si $t\in]0,\pi]$ et $f(0)=-1$. Montrer que *f* est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

5) a) Montrer que $\forall m\in\mathbb{N}^*\quad \displaystyle\sum_{n=1}^m\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt$.

b) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ et montrer: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Partie B : Etude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1) a) Montrer que si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge. On note désormais S l'application définie par : $\forall x \in [0,+\infty[\quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2) Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3) a) Etablir que : $\forall (x,y) \in ([0,+\infty[)^2 \quad S(y) - S(x) = (y-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b) En déduire que : $\forall (x,y) \in ([0,+\infty[)^2 \quad |S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6}|y-x|$.

c) Montrer que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

4) a) Etablir que si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ avec $x \neq y$: $\left| \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

b) En déduire que S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que : $\forall x \in [0,+\infty[\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$

c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5) Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie par : $\forall t \in [1,+\infty[\quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$
.

a) Soit $A \in [1,+\infty[$. Calculer l'intégrale $\int_1^A \varphi(t)\,dt$ et montrer que cette intégrale admet une limite réelle I quand A tend vers $+\infty$. Calculer I.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt \leq \varphi(n)$.

c) En déduire que : $I \leq S(x) \leq 1 + I$.

d) En déduire que : $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

6) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Exercice 7 (EDHEC 99 voie S)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction g_n par : $\forall x \in [n,+\infty[\quad g_n(x) = \int_n^x e^{t^2}\,dt$.

1) Etude de g_n

a) Montrer que g_n est dérivable sur $[n,+\infty[$ et donner son sens de variation.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$. On pourra comparer e^{t^2} et e^t.

c) En déduire que, pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté x_n, dans $[n,+\infty[$, tel que $g_n(x_n) = 1$.

2) Etude de la suite (x_n)

   a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$.

3) On pose : $u_n = x_n - n$

   a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

   c) Déduire de l'encadrement obtenu en 2) b) que : $x_n - n \sim e^{-n^2}$.

<u>Exercice 8 (EDHEC 97 voie S)</u>

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

   a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^x (x-t)^3 \sin(t)\,dt = x^3 - 6x + 6\sin x$. En déduire que g est continue en 0.

   b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$, puis que : $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^{2x} g(t)dt = 0$.

   c) En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer que f est paire.

3) Etude des variations de f

   a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.

   b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

   c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

4) Etude de f en $+\infty$

   a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad |f(x)| \leq \dfrac{1}{2x}$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5) Courbe de f

   a) Montrer que $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.

   b) Montrer que : $f(2\pi) = \displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right] \sin(t)\,dt$. En déduire que : $f(2\pi) > 0$.

   c) Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations $y = \dfrac{1}{2x}$ et $y = -\dfrac{1}{2x}$ ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[-2\pi,+2\pi]$.

<u>Exercice 9 (Ecricome 2010 voie S)</u>

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n par : $\forall x \in [0,1[\quad g_n(x) = \dfrac{x^{1/n} - x^{2/n}}{1-x}$.

   Quelle valeur faut-il donner à $g_n(1)$ pour que g_n soit continue sur $[0,1]$?

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+....+t^{n-1}}$ et $v_n = \int_0^1 g_n(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t^{1/n} - t^{2/n}}{1-t}\,dt$.

   a) Vérifier que : $\frac{1}{1+t+...+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}$ si $t \in [0,1[$.

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \le u_n - \frac{1}{2} \le \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de u_n.

   c) En utilisant le changement de variable $x = t^{1/n}$, montrer que : $v_n = n\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction φ_k par : $\forall x \in]0,1[\quad \varphi_k(x) = \frac{(\ln x)^k}{x-1}$.

   a) Quelle valeur faut-il donner à $\varphi_k(1)$ pour que φ_k soit continue sur $]0,1]$?

   b) On pose $J_k(x) = \int_x^1 (\ln t)^k\,dt$. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k(x)$ admet, quand x tend vers 0, une limite réelle que l'on calculera.

   Dans la suite, on admettra que l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{t-1}\,dt$ est définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   En particulier, on posera : $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$ sans essayer de la calculer.

4) Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^x - e^{2x}$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que : $\forall x \in]-\infty,0] \quad \left|e^x - e^{2x} + x\right| \le \frac{3x^2}{2}$.

5) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt \right| \le \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt$.

6) Donner un équivalent de v_n, puis de $u_n - \frac{1}{2}$ en fonction de *I*.

Exercice 10 (EDHEC 2004 voie E et voie S)

On rappelle que si h est une fonction continue sur un intervalle $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} h(t)\,dt$ est la limite de la fonction $x \mapsto \int_a^x h(t)\,dt$ quand x tend vers $+\infty$ à condition que cette limite existe et soit une limite réelle.

Partie A (voie E)

Le but de cette partie est de calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

1) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$. En particulier : $u_0 = \int_0^1 \frac{dt}{2+t}$.

   a) Calculer u_0 et u_1.

   b) A l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)$, calculer u_2.

   c) Etudier le sens de variations de la suite (u_n).

   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_n \le \ln 2$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

   e) En écrivant $\ln 2 - u_n$ sous forme d'une intégrale, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln 2 - u_n \le \frac{1}{n+1}$.

   f) En déduire la limite de la suite (u_n).

2) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $\forall x \in [1,+\infty[\quad \varphi_n(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t+t^n}$.

   a) Etudier le sens de variations de la fonction φ_n sur $[1,+\infty[$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \leq \varphi_n(x) \leq 1 - \frac{1}{x}$.

   c) En déduire que la fonction φ_n a une limite réelle (que l'on ne demande pas de calculer) quand x tend vers $+\infty$. On note : $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n} = \lim_{x \to +\infty} \varphi_n(x)$ pour tout entier $n \geq 2$.

   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$. En déduire la limite de la suite (v_n).

3) En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n}$.

<u>Partie B (voie S)</u>

Le but de cette partie est d'étudier la fonction *f* définie par : $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.

1) Soit $x \in]0,+\infty[$ et $n = \text{Ent}(x)$. Montrer que : $\forall a \in [1,+\infty[\quad \varphi_{n+2}(a) \leq \int_1^a \frac{dt}{1+t+t^{x+1}} \leq \varphi_{n+1}(a)$.

2) En déduire que si $x \in]0,+\infty[$, la fonction $a \mapsto \int_1^a \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ admet une limite réelle quand a tend vers $+\infty$. En déduire que la fonction *f* est bien définie sur $]0,+\infty[$.

3) Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. Comparer $f(x)$ et $f(y)$. En déduire le sens de variations de la fonction *f* sur $]0,+\infty[$.

4) a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $t \in [1,+\infty[$, simplifier $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}$.

   b) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)} = \frac{\ln 2}{x}$.

5) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad 0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

7) Dresser le tableau de variations de la fonction *f* et donner l'allure de sa courbe représentative.

<u>Exercice 11 (EDHEC 2007 voie S)</u>

Le but de l'exercice est d'étudier la suite de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{ne^{-t}}{nt+1} dt$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f_n(x) = \int_0^x \frac{ne^{-t}}{nt+1} dt$.

   a) Etudier le sens de variations de la fonction f_n sur $[0,+\infty[$.

   b) Démontrer que : $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq f_n(x) \leq n(1-e^{-x})$.

   c) En déduire que la fonction f_n admet une limite réelle u_n quand x tend vers $+\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \int_0^1 \frac{ne^{-t}}{nt+1}\,dt$ et $w_n = \int_1^{+\infty} \frac{ne^{-t}}{nt+1}\,dt$.

   a) Démontrer que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \le \int_1^x \frac{ne^{-t}}{nt+1}\,dt \le \frac{1}{e} - e^{-x}$.

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \le w_n \le \frac{1}{e}$.

   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \ge \frac{1}{e}\ln(n+1)$.

   d) En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On se propose de trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

   a) Montrer que la fonction définie sur $]0,1]$ par $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ admet un prolongement par continuité sur $[0,1]$ que l'on notera *g*. On pose : $I = \int_0^1 g(t)\,dt$

   b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \le \int_0^1 \frac{n(1-e^{-t})}{nt+1}\,dt \le I$.

   c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 12 (d'après EM Lyon 1989 voie S)

Soit *f* la fonction définie sur $I = \left[0,\frac{1}{4}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$.

1) Montrer que *f* est de classe C^∞ sur *I* et que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I \quad f^{(n)}(x) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(1-4x)^{-n+\frac{1}{2}}$.

2) En déduire la formule de Taylor avec reste intégral de *f* à l'ordre *n* entre 0 et *x*, pour tout réel *x* de l'intervalle *I* et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-4t}}\left(\frac{x-t}{1-4t}\right)^n dt$.

   a) Soit $x \in I$. Etudier le sens de variations de la fonction $t \mapsto \frac{x-t}{1-4t}$ sur *I*.

   b) En déduire que : $\forall x \in I \quad 0 \le R_n(x) \le \frac{1}{2}x^n$.

4) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \binom{2n}{n} \le 4^n$.

5) En déduire que : $\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k$.

Exercice 13

Partie A : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$.

1) A l'aide d'un changement de variable, démontrer que : $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = I_n$.

2) Calculer I_0 et I_1.

3) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

4) Déterminer le sens de variations de la suite (I_n).

5) Démontrer que : $I_{n+1} \sim I_n$ quand n tend vers $+\infty$.

6) Démontrer qu'il existe un réel K que l'on déterminera tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad nI_nI_{n-1} = K$.

7) Démontrer que : $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

8) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

9) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n+1} = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

10) En déduire la formule de Wallis : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

<u>Partie B : Formule de Stirling</u>

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale : $J_n = \displaystyle\int_1^n \ln x\, dx$. En déduire $e^{J_n} = e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

2) Etudier la convexité de la fonction ln, et en déduire que :

   a) $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_k^{k+1} \ln x\, dx \geq \frac{1}{2}[\ln(k+1) + \ln k]$.

   b) $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_k^{k+1/2} \ln x\, dx \leq \frac{1}{2}\ln k + \frac{1}{8k}$.

   c) $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_{k+1/2}^{k+1} \ln x\, dx \leq \frac{1}{2}\ln(k+1) - \frac{1}{8(k+1)}$.

   d) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln x\, dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n!) - \dfrac{1}{2}\ln n \leq J_n \leq \ln(n!) - \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

4) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = J_n - \ln(n!) + \dfrac{1}{2}\ln n$.

   a) Déduire du 4) le sens de variations de la suite (u_n).

   b) En déduire sa convergence.

   c) En déduire qu'il existe un réel A tel que : $n! \sim A\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

   d) Avec la formule de Wallis, démontrer la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

<u>Partie C : Intégrale de Gauss</u>

1) Démontrer que : $\forall t \in [0,1[\quad \ln(1+t) \leq t \leq -\ln(1-t)$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,n] \quad \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-n}$.

3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et $w_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.

a) Dans v_n, effectuer le changement de variable : $u = \text{Arcsin}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)$.

b) Dans w_n, effectuer le changement de variable : $u = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{n}\, I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \leq \sqrt{n}\, I_{2n-2}$.

5) En déduire que l'intégrale $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt$ a une limite réelle que l'on calculera quand n tend vers $+\infty$.

6) En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^{x} e^{-t^2}\, dt$ admet une limite réelle que l'on calculera quand x tend vers $+\infty$. On la note $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

7) En déduire que la fonction $x \mapsto \int_x^{0} e^{-t^2}\, dt$ admet aussi une limite réelle que l'on calculera quand x tend vers $-\infty$. On la note $\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\, dt$.

8) En déduire l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.