Réponses et Indications (Etudes de fonctions)

Exercice 1

1) et 2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3) $f'(x) = -(x+2)e^{-x} - 1$.

4) $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -1$.

5) Etudier le signe de $f''(x) = (x+1)e^{-x}$.

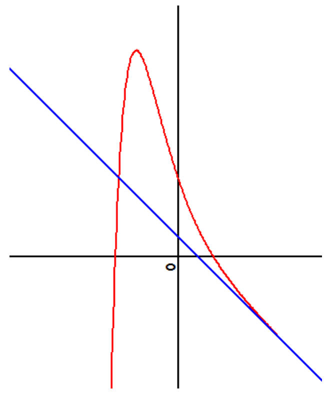
6) Pas de solution sur $[-1,+\infty[$. Théorème de bijection sur $]-\infty,-1[$.

7) Montrer $f'(-2) < f'(\alpha) < f'(-3)$ et utiliser la stricte monotonie de f'.

8) Utiliser le sens de variations de f' pour trouver son signe.

9) $y = (e+1)(1-x)$ (équation de la tangente au point d'inflexion.

x	$-\infty$		α		-1		$+\infty$
f''			$-$		0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$			$-e-1$	$\nearrow$	-1
f'		$+$	0		$-$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$			$-\infty$



En $-\infty$, branche parabolique de direction Oy.
En $+\infty$, asymptote oblique d'équation $y = -x+1$ (courbe au dessus).

Exercice 2

1) $\lim_{x\to0^+} f_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$.

2) $f'_a(x) = -\dfrac{1}{x^2} + ae^{-ax}$.

3) Montrer $f'_a(x) > 0 \Leftrightarrow h_a(x) > 0$ et $f'_a(x) < 0 \Leftrightarrow h_a(x) < 0$.

4) h_a est strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{2}{a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{2}{a},+\infty\right[$.

Et $\lim_{x\to0^+} h_a(x) = \lim_{x\to+\infty} h_a(x) = -\infty$.

5) et 6) Utiliser le théorème de bijection et discuter le signe de $h_a\left(\dfrac{2}{a}\right) = 2\ln 2 - 2 - \ln a$.

Si $a < \dfrac{4}{e^2}$, deux solutions. Si $a = \dfrac{4}{e^2}$, une solution. Si $a > \dfrac{4}{e^2}$, pas de solution.

Si $a < \dfrac{4}{e^2}$:

x	0		$r(a)$		$s(a)$		$+\infty$
f'_a		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

Si $a = \dfrac{4}{e^2}$:

x	0		$\dfrac{e^2}{2}$		$+\infty$
f'_a		$-$	0	$-$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	0

Si $a > \dfrac{4}{e^2}$:

x	0		$+\infty$
f'_a		$-$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$	0

7) Pour a), utiliser $h_a[r(a)] = 0$. Pour b), utiliser $0 < r(a) < \dfrac{2}{a}$ pour montrer $\lim\limits_{a \to 0} ar(a) = 0$.

$\lim\limits_{a\to 0} m(a) = -1$ et $m(a) + 1 \underset{0}{\sim} 2\sqrt{a}$. Utiliser $r(a) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Exercice 3

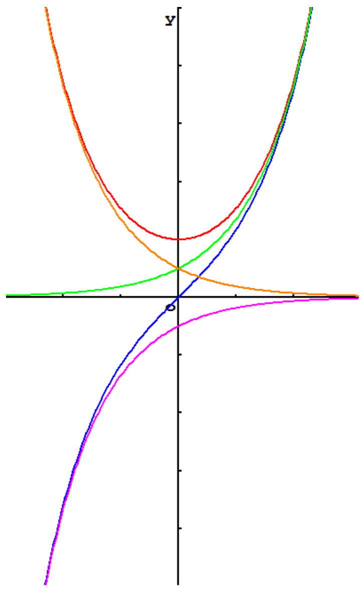
Partie A

1) $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

3) $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{Ch}\, x$ et $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{Sh}\, x$.

Partie B

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Sh'		$+$	0	$+$	
Sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



La courbe de Sh (en bleu) est symétrique par rapport au point O.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Ch'		$-$	0	$+$	
Ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe de Ch (en rouge) est symétrique par rapport à Oy.

En $\pm\infty$, branches paraboliques de direction Oy.

Pour la courbe asymptote, montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{Sh}\, x - \frac{1}{2}e^x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{Ch}\, x - \frac{1}{2}e^x\right) = 0.$$

Partie C

1) $\mathrm{Ch}^2\, x - \mathrm{Sh}^2\, x = 1$.

2) Utiliser les propriétés de l'exponentielle et la parité des fonctions Ch et Sh.

Partie D

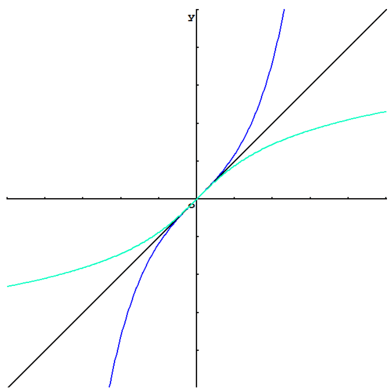
1) Sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I = \mathbb{R}$.

2) $\mathrm{ArgSh} = \mathrm{Sh}^{-1}$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(\mathrm{ArgSh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ArgSh}\, x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ArgSh}\, x = +\infty$.

Sa courbe est symétrique de celle de Sh par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



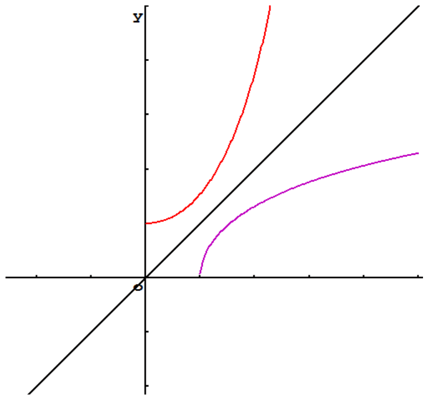
3) $\mathrm{ArgSh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ car $x = \mathrm{Sh}\, y \Leftrightarrow y = \mathrm{ArgSh}\, x$.

Partie E

1) Ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $J=[1,+\infty[$.
2) $\text{ArgSh}=\left(\text{Ch}_{/\mathbb{R}^+}\right)^{-1}$ est continue, strictement croissante sur J et dérivable sur $J-\{1\}=]1,+\infty[$.

   $(\text{ArgCh})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et et $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{ArgCh}\,x=+\infty$.

   Sa courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y=x$ de celle de la restriction de Ch à $\mathbb{R}^+$. Elle admet une demi-tangente verticale en 1.



3) $\text{ArgCh}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ car $x=\text{Ch}\,y \Leftrightarrow y=\text{ArgCh}\,x$ si $x\geq 1$ et $y\geq 0$.

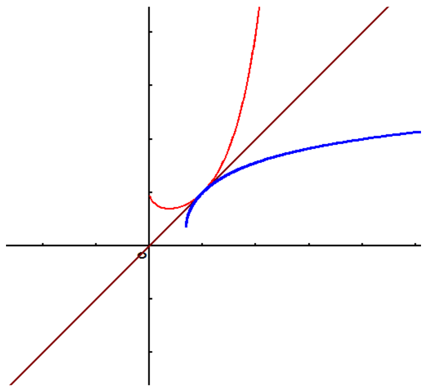
Exercice 4

Partie A

1) f est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. Ecrire $f(x)=e^{x\ln x}$.
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

   Branche parabolique de direction Oy.
3) $f'(x)=(\ln x+1)e^{x\ln x}$.

x	0		$1/e$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$



4) La courbe (rouge) est au dessus de sa tangente d'équation $y=x$.

Partie B

1) Théorème de bijection : g est bijective de I dans $J=[e^{-1/e},+\infty[$.
2) φ est continue et strictement croissante sur J, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$. Sa courbe (bleue) est symétrique de celle de g par rapport à la droite d'équation $y=x$.
3) Utiliser $g\circ\varphi=\text{Id}_J$. En déduire $\ln x$, puis la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{\ln x}$.
4) φ est dérivable sur $K=]e^{-1/e},+\infty[$ et utiliser la dérivée de $\varphi=g^{-1}$.

Partie C

$u_n=n[1-\varphi(n)-\ln n]$ et $u_n\sim -n\ln n$.

Exercice 5

Partie A

Cette partie peut être traitée avec des développements limités.

1) Etudier le sens de variations, puis en déduire le signe des fonctions

   $x\mapsto e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ et $x\mapsto e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-x^3$.
2) Par encadrement : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.
3) Par changement de variable : $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Partie B

1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

2) g est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Elle est positive.

   f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ car $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

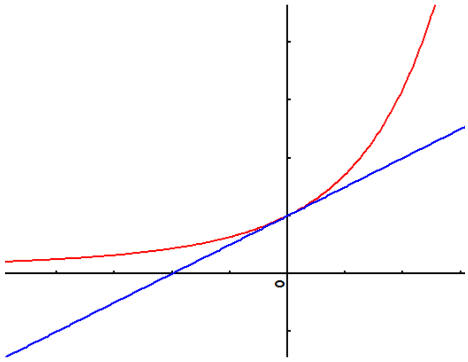
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

   Branche parabolique de direction Oy.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

   Asymptote horizontale d'équation $y=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	$1/2$	$+$
f	0 $\nearrow$	1	$+\infty$



5) f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$.
6) Montrer $f(1)<f(\alpha)<f(2)$ et utiliser la stricte monotonie de f.

<u>Partie C</u>

1) Récurrence en utilisant le sens de variations de $x\mapsto \ln(1+2x)$.
2) et 3) Convergence monotone et théorème du point fixe.

<u>Exercice 6</u>

<u>Partie A</u>

1) Vérifier les hypothèses du théorème : h continue et dérivable sur I et $h(a)=h(b)=0$.
2) Appliquer le théorème : il existe c strictement compris entre a et b tel que $h'(c)=0$.
3) Utiliser 2) entre a et x, puis la continuité de g''.
4) Appliquer à $g(x)=e^x$ en 0.

<u>Partie B</u>

1) Montrer $\forall x\in\mathbb{R}^*\ \dfrac{e^x-1}{x}>0$. Montrer l'égalité sur $\mathbb{R}^*$ et vérifier en 0.
2) Opérations algébriques et composition de fonctions de classe C^1, et même C^∞.
3) $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	$1/2$	$+$
f	0 $\nearrow$	1	$+\infty$

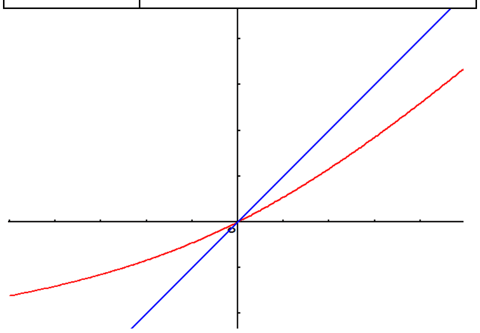
4) Utiliser $e^x-1\underset{0}{\sim}x$, puis les limites en 0.
5) $\lim\limits_{x\to0} f'(x)=\dfrac{1}{2}$. Utiliser A 4).

   Théorème de prolongement de la dérivée.
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

   Direction asymptotique $y=x$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

   Branche parabolique de direction Ox.



7) g est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Elle est positive.

   f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ car $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$.

<u>Partie C</u>

1) Récurrence.
2) Suite décroissante car $f(x)-x<0$ si $x>0$.
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. Convergence monotone.

4) Initialiser $n := 0$ et $u := 1$, puis, dans une boucle, répéter $n := n+1$ et $u := \ln((\exp(u)-1)/u)$ jusqu'à ce que $u <= \exp(-3*\ln(10))$. Afficher *n*.
   On obtient : $n = 11$.

Exercice 7

A traiter sans les développements limités sauf le DL_1.

1) Vérifier les hypothèses du théorème : φ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Appliquer le théorème : $\exists c \in]a,b[\quad \varphi'(c) = 0$.
2) Séparer les limites en a^- et a^+ et utiliser le 1).
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$
   $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x - 1}{x-1+\ln x} = \frac{1}{2} \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.
4) *f* est dérivable en 0 donc $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
   $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0)$ donc $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\varepsilon(x)$.
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
   $\sin x = x + x^2\varepsilon(x) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
5) $D = \left]-\frac{1}{3}, 0\right[\cup]0,+\infty[$. *h* est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\frac{2}{3}$.

Exercice 8

1) Série divergente car $u_n \sim -\frac{1}{2n}$. Poser $h = \frac{1}{n}$ pour utiliser les $DL(0)$.
2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-2x+x^2}-2}{1-x+\ln x} = -\frac{1}{2}$. Poser $h = x-1$ pour utiliser les $DL(0)$.
3) $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{15} + o(x^2)$.

Exercice 9

1) $g(x) \underset{0}{=} 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$.
2) $f(x) \underset{0}{=} x - 2x^2 + o(x^2)$, donc tangente d'équation $y = x$ et courbe en dessous.
3) Poser $h = \frac{1}{x}$ et remarquer que $f(x) = \frac{1}{h}g(-h)$, donc $f(x) \underset{\infty}{=} x + 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Asymptote d'équation $y = x + 2$, courbe au dessus en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

Exercice 10

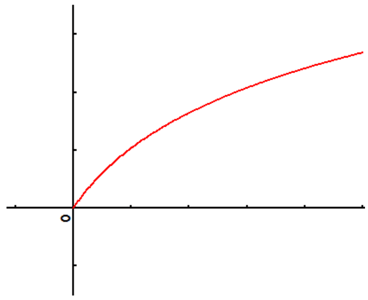
1) Série convergente car $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$. $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
2) Série convergente car $f'_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$.
3) $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)| = \frac{h^2}{(n+x)^2(n+x+h)}$. Série convergente par majoration.
   $K = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. *F* est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'(x) = G(x)$.

4) a) Etudier le sens de variations de H' pour pouvoir appliquer l'inégalité des accroissements finis à H en remarquant que $H'(k) = f_k(x)$.

b) Encadrer $f_k(x)$ et sommer de 2 à n.

c) et d) Faire tendre n vers l'infini. $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
F'	$+$
F	$0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$



Exercice 11

Partie A

1) Appliquer la relation à $y = 0$.
2) Appliquer la relation à $y = 1$.
3) Montrer que $f(-1) = 0$ et appliquer la relation à $y = -1$.

Partie B

1) Montrer que G' est nulle et écrire $G(1) = G(2)$. f est dérivable par opérations algébriques et composition de fonctions dérivables.
2) Dériver la relation par rapport à y. Appliquer à $y = 1$ et montrer $f'(1) \neq 0$ par l'absurde. Et f est la primitive de f' qui s'annule en 1.

Exercice 12

Partie A

1) a) $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

b) Appliquer la relation à $y = 0$. Contradiction car f non périodique.

c) Appliquer la relation à $x = 0$.

2) $f(x + 2a) = -f(x)$ donc $f(x + 4a) = f(x)$. Contradiction car f non périodique. Donc f ne s'annule pas.
3) Justifier que si f change de signe, elle s'annule au moins une fois.
4) La suite (u_n) converge vers 1. Croissance monotone et théorème du point fixe.
5) a) $f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1$.

b) Utiliser $u_n = 2u_{n+1}^2 - 1$.

c) Récurrence.

d) $f(x) \geq 1$. Passage à la limite.

Partie B

1) a) Suite stationnaire : $w_n = 1$.

b) $w_n = \dfrac{1}{2}\left(q^n + \dfrac{1}{q^n}\right)$. Récurrence linéaire d'ordre 2.

c) Ne pas oublier de justifier le signe de $q^n - \dfrac{1}{q^n}$ pour calculer $\sqrt{w_n^2 - 1}$.

2) a) Appliquer la relation à $(n+1)x$ et x.

b) $f(nx) = \dfrac{1}{2}\left(q^n + \dfrac{1}{q^n}\right)$ avec $q = f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 - 1}$. Utiliser le 1).

c) $\left(f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 - 1}\right)^n = f(nx) + \sqrt{[f(nx)]^2 - 1}$.

3) a) Démontrer d'abord sur $\mathbb{N}$, puis par parité sur $\mathbb{Z}$.

b) Ecrire r sous la forme $r = \dfrac{p}{s}$ avec $(p, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et écrire $f(sr) = f(p)$.

Utiliser a) et 2) b), et montrer $f(r)+\sqrt{[f(r)]^2-1}=a^r$, donc $f(r)=\frac{1}{2}\left(a^r+a^{-r}\right)$.

c) Utiliser l'encadrement de la partie entière.

d) Par continuité : $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ en faisant tendre *n* vers l'infini.

e) Montrer $a\neq 1$ en raisonnant par l'absurde.

Partie C

$\mathscr{E}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ où $a>1$.

Pour la réciproque, ne pas oublier de vérifier toutes les hypothèses.

Exercice 13

Partie A

1) et 3) Vérifier la relation et justifier la continuité.
2) Il y a trois fonctions constantes : $x\mapsto 0$, $x\mapsto 1$ et $x\mapsto -1$.

Partie B

1) $f(2x)f(0)=[f(x)]^4$.
2) Récurrence.
3) Utiliser la continuité de *f* en 0.
4) Utiliser le 1).

Partie C

1) $f(0)=1$ ou $f(0)=-1$. Appliquer la relation à $x=y=0$.
2) Justifier que si *f* change de signe, elle s'annule au moins une fois.
3) Appliquer la relation à $x=0$.

Partie D

1) Appliquer la fonction logarithme à la relation (1).
2) $g(0)=0$.
3) Récurrence double sur $\mathbb{N}$, puis parité pour $\mathbb{Z}$.
4) a) Utiliser $g(1)=g(qx)$ avec $x=\frac{1}{q}$.

   b) Utiliser $g\left(\frac{p}{q}\right)=g(px)$ avec $x=\frac{1}{q}$.

   c) Utiliser l'encadrement de la partie entière.

   d) Par continuité : $g(x)=ax^2$ en faisant tendre *n* vers l'infini.

Partie E

$\mathscr{F}$ est l'ensemble formé par la fonction nulle et toutes les fonctions de la forme $x\mapsto e^{ax^2}$ ou $x\mapsto -e^{ax^2}$ où *a* est un réel.