ETUDES DE FONCTIONS

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x)=(x+3)e^{-x}-x+1$. On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1) Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
4) Calculer les limites de la fonction f' en $+\infty$ et en $-\infty$.
5) Etudier les variations de la fonction f'.
6) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution α.
7) Justifier que $-3<\alpha<-2$.
8) Déterminer le signe de f', puis le tableau de variations de f.
9) Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse (-1).
10) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe (C).
11) Donner l'allure de la courbe (C). On prendra $\alpha \approx -2{,}1$ et $f(\alpha)\approx 10{,}5$.

Exercice 2 (d'après HEC 94)

Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif et on étudie la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_a(x)=\dfrac{1}{x}-e^{-ax}$.

1) Calculer les limites de f_a en 0 et en $+\infty$.
2) Justifier la dérivabilité de f_a et calculer sa dérivée.
3) Montrer que $f'_a(x)$ est de même signe que $h_a(x)=2\ln x+\ln a-ax$.
4) Etudier les variations de la fonction h_a sur $]0,+\infty[$ et ses limites en 0 et en $+\infty$.
5) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de l'équation $h_a(x)=0$. On précisera le signe de $h_a(x)$ dans chaque cas. Lorsque l'équation admet deux solutions, on les notera $r(a)$ et $s(a)$ avec $r(a)<s(a)$.
6) En déduire le tableau de variations de la fonction f_a et l'allure de sa courbe représentative dans les cas $a>\dfrac{4}{e^2}$, $a=\dfrac{4}{e^2}$ et $a<\dfrac{4}{e^2}$. On ne cherchera pas à calculer $f_a[r(a)]$ et $f_a[s(a)]$.
7) On suppose maintenant que $0<a<\dfrac{4}{e^2}$ et on pose $m(a)=f_a[r(a)]$.
   a) Montrer que : $r(a)=\sqrt{\dfrac{e^{ar(a)}}{a}}$.
   b) Déterminer par encadrement $\lim\limits_{a\to 0} ar(a)$ et en déduire que $\lim\limits_{a\to 0}\sqrt{a}\,r(a)=1$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} m(a)$.
   d) Déterminer un équivalent simple de $m(a)+1$.

Exercice 3

Partie A : Parité

Soit *f* une fonction définie sur une partie *D* de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

1) On suppose que *f* est somme d'une fonction paire *g* et d'une fonction impaire *h*. Pour tout $x \in D$, calculer $g(x)$ et $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.
2) Montrer réciproquement que, pour toute fonction *f* définie sur *D*, les deux expressions obtenues au **1)** définissent bien une fonction *g* paire et une fonction *h* impaire telles que $f = g + h$.
3) On en déduit que toute fonction définie sur une partie *D* de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Préciser le cas où : $f(x) = e^x$.

Partie B : Etudes de fonctions

1) Etudier la fonction « sinus hyperbolique » définie par : $\mathrm{Sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
2) Etudier la fonction « cosinus hyperbolique » définie par : $\mathrm{Ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
3) Préciser la nature des branches infinies des courbes représentatives de Sh et Ch, et montrer que la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{2}e^x$ leur est asymptote en $+\infty$.
4) Tracer sur la même figure les courbes représentatives des fonctions Sh et Ch, ainsi que les courbes d'équations $y = \dfrac{1}{2}e^x$, $y = \dfrac{1}{2}e^{-x}$ et $y = -\dfrac{1}{2}e^{-x}$.

Partie C : Quelques propriétés « trigonométriques »

1) Pour tout réel *x*, calculer : $\mathrm{Ch}^2\, x - \mathrm{Sh}^2\, x$.
2) Démontrer les « formules d'addition » suivantes :
   a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{Ch}(x + y) = \mathrm{Ch}\, x \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, x \mathrm{Sh}\, y$.
   b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{Ch}(x - y) = \mathrm{Ch}\, x \mathrm{Ch}\, y - \mathrm{Sh}\, x \mathrm{Sh}\, y$.
   c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{Sh}(x + y) = \mathrm{Sh}\, x \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Ch}\, x \mathrm{Sh}\, y$.
   d) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{Sh}(x - y) = \mathrm{Sh}\, x \mathrm{Ch}\, y - \mathrm{Ch}\, x \mathrm{Sh}\, y$.

Partie D : Réciproque de Sh

1) Montrer que la fonction Sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle *I* que l'on déterminera. On note ArgSh sa fonction réciproque.
2) Préciser les propriétés de la fonction ArgSh et tracer sa courbe représentative.
3) Soit $x \in I$. Calculer l'unique réel *y* tel que : $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. En déduire l'expression de $\mathrm{ArgSh}(x)$ en fonction de *x*.
4) Retrouver à l'aide de cette expression l'étude de la dérivabilité de la fonction ArgSh et le calcul de sa dérivée.

Partie E : Réciproque de Ch

1) Démontrer que la fonction Ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle *J* que l'on déterminera. On note ArgCh sa fonction réciproque.
2) Préciser les propriétés de la fonction ArgCh et tracer sa courbe représentative.
3) Soit $x \in J$. Déterminer l'expression de $\mathrm{ArgCh}(x)$ en fonction de *x*.
4) Retrouver à l'aide de cette expression l'étude de la dérivabilité de la fonction ArgCh et le calcul de sa dérivée.

Exercice 4 (Ecricome 1996 voie S)

A – Etude préliminaire

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = x^x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.

Soit (*C*) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* sur $\mathbb{R}^+$.
2) Etudier la limite de *f* en $+\infty$. Préciser la nature de la branche infinie.
3) Etudier les variations de *f*.
4) Quelle est la position de (*C*) par rapport à sa tangente (*T*) au point d'abscisse 1 ?
5) Tracer la courbe (*C*). On donne $e^{-1} \approx 0{,}36$ et $f(e^{-1}) \approx 0{,}69$.

B – Etude de fonction

1) Soit *g* la restriction de *f* à l'intervalle $I = [e^{-1}, +\infty[$. Montrer que *g* est bijective de *I* dans un intervalle *J* que l'on précisera.
2) Soit φ sa réciproque. Préciser ses propriétés et tracer sa courbe représentative (Γ) sur la même figure que la courbe (*C*).
3) Démontrer que : $\forall x \in J \quad [\varphi(x)]^{\varphi(x)} = x$. En déduire que : $\varphi(x) = o(\ln x)$ en $+\infty$.
4) Déterminer le plus grand intervalle *K* sur lequel φ est dérivable et montrer que :

$$\forall x \in K \quad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x[\varphi(x) + \ln x]}.$$

C – Etude de suite

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note (T_n) la tangente à (Γ) au point d'abscisse *n*.

1) Déterminer l'abscisse u_n du point d'intersection de (T_n) avec l'axe des abscisses.
2) Déterminer un équivalent simple de u_n quand *n* tend vers $+\infty$.

Exercice 5

Partie A

1) Démontrer que : $\forall x \in [0,1] \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} \le e^x \le 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3$.
2) En déduire : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$.
3) En déduire : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ si $x \ne 0$ et $f(0) = 1$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* sur $\mathbb{R}$.
2) a) Etudier les variations de la fonction *g* définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = xe^x - e^x + 1$
   .
   b) En déduire le signe de $g(x)$.
   c) En déduire les variations de la fonction *f*.
3) Déterminer les limites de *f* et interpréter géométriquement.
4) Tracer le tableau de variations et la courbe représentative de *f*.
5) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.
6) Montrer que : $1 < \alpha < 2$.

Partie C

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$.

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \le u_n \le u_{n+1} \le 2$.
2) En déduire la convergence de la suite (u_n).
3) Montrer que sa limite est α.

Exercice 6 (d'après EDHEC 2003 voie E)

Partie A

Soit g une fonction de classe C^2 sur un intervalle *I*. Soient a et b deux éléments distincts appartenant à *I*. On pose : $M = \dfrac{2}{(b-a)^2}\left[g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)\right]$.

1) Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction h définie par : $h(x) = g(b)-g(x)-(b-x)g'(x)-\dfrac{(b-x)^2}{2}M$
2) En déduire que, pour tous a et b de *I*, il existe un réel c compris entre a et b tel que : $g(b) = g(a)+(b-a)g'(a)+\dfrac{(b-a)^2}{2}g''(c)$.
3) En déduire que : $g(x) \underset{a}{=} g(a)+(x-a)g'(a)+\dfrac{(x-a)^2}{2}g''(a)+o\left((x-a)^2\right)$.
4) En déduire qu'il existe une fonction ε telle que : $e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que *f* est définie sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x) - x$.
2) Montrer que *f* est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
4) Etudier la continuité de *f* en 0.
5) Montrer en utilisant la partie **A** que la fonction f' a une limite en 0. En déduire que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.
6) Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter géométriquement.
7) a) Etudier les variations de la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = xe^x - e^x + 1$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$.
   c) En déduire les variations de la fonction *f*.
8) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction *f*.

Partie C

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.
2) En utilisant la remarque du **B-1)**, déterminer le signe de $f(x)-x$ pour tout réel x strictement positif. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).
3) En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.
4) On donne $u_0 = 1$. Ecrire un programme en PASCAL permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$.

Exercice 7

1) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ avec $a < b$.
Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ définie par :
$\varphi(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)] + f(b)g(a) - f(a)g(b)$.
En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$
2) Soient f et g deux fonctions de classe D^1 sur un intervalle I qui contient a. Déduire de ce qui précède que, si ces limites existent, alors : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
3) Sous le nom de règle de l'Hôpital, ce résultat est en particulier utilisé lorsque $f(a) = g(a) = 0$ pour lever certaines indéterminations. Appliquer ce résultat à la recherche des limites suivantes :
   a) Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0 (retrouver le résultat connu !).
   b) Limite de $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ quand x tend vers 0 (retrouver le résultat connu !).
   c) Limite de $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ quand x tend vers 0.
   d) Limite de $\dfrac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$ quand x tend vers 0.
   e) Limite de $\dfrac{x^x - 1}{x - 1 + \ln x}$ quand x tend vers 1.
   f) Limite de $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ quand x tend vers 0.
4) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I qui contient 0.
   a) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 que l'on précisera.
   b) En utilisant le résultat du **2)**, calculer la limite en 0 de $\dfrac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2}$.
   c) En déduire que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2, c'est-à-dire qu'il existe des réels α, β et γ, et une fonction ε tels que :
   $$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
   d) En déduire les développements limités d'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :
   $$f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = \ln(1 + x) \qquad f_3(x) = \sin x \qquad f_4(x) = \cos x$$
5) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{1 - e^{-2x} - 2\sin x}{x\ln(1 + 3x)}$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition D de h.
   b) Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. Préciser son prolongement que l'on notera $\overline{h}$.

Exercice 8

En utilisant des développements limités :

1) Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \ln\left[n \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right]$.
2) Calculer : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5 - 2x + x^2} - 2}{1 - x + \ln x}$.
3) Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de : $f(x) = \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$.

Exercice 9

1) Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $g(x) = e^{2x/(x^2-1)}$.

2) Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = xe^{2x/(x^2-1)}$ et (*C*) sa courbe représentative.

   a) A l'aide du 1), déterminer une équation de la tangente (*T*) au point d'abscisse 0 à la courbe (*C*) et préciser la position de (*C*) par rapport à (*T*).

   b) Toujours à l'aide du 1), montrer que la courbe (*C*) admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique (*D*) dont on donnera l'équation, et préciser la position de (*C*) par rapport à (*D*).

Exercice 10 (d'après Ecricome 2008 voie S)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

1) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, on considère la série de terme général $f_n(x)$.
   a) Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.
   b) On note $F(x)$ sa somme. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la série de terme général $f'_n(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
3) On se propose d'étudier la dérivabilité de la fonction *F*.
   a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et *h* tel que $x+h \in \mathbb{R}^+$: $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)| \le \frac{h^2}{n^3}$.
   b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et *h* tels que $x+h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$.
   c) Montrer qu'il existe un réel *K* tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}^+$, on ait : $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \le K|h|$.
   d) En déduire que *F* est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Quelle est sa dérivée ?
4) On se propose de chercher un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On définit la fonction *H* par : $\forall t \in]0,+\infty[\quad H(t) = \ln t - \ln(t+x)$.
   a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f_{k+1}(x) \le H(k+1) - H(k) \le f_k(x)$.
   b) En déduire que : $\forall n \ge 2 \quad H(n+1) - H(1) \le \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \le H(n) - H(1) + \frac{x}{x+1}$.
   c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln(1+x) \le F(x) \le \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.
   d) Déterminer un équivalent de *F* en $+\infty$.
5) Tracer le tableau de variations de *F* et l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 11

Partie A

Pour toute partie non vide *D* de $\mathbb{R}$, on appelle $\mathscr{L}_D$ l'ensemble des applications de *D* dans $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall (x,y) \in D^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$.

1) Montrer que si $0 \in D$, alors $\mathscr{L}_D$ ne contient que la fonction nulle.
2) Montrer que si $1 \in D$, alors toute fonction *f* appartenant à $\mathscr{L}_D$ vérifie $f(1) = 0$.
3) Montrer que si $D = \mathbb{R}^*$, alors toute fonction *f* appartenant à $\mathscr{L}_D$ est paire.

Partie B

On suppose maintenant que $D =]0,+\infty[$, et on appelle $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions *f* non nulles, continues sur *D* et qui vérifient : $\forall (x,y)\in D^2 \quad f(xy) = f(x)+f(y)$.

Soit *f* une fonction qui appartient à $\mathscr{L}$ et F son unique primitive qui s'annule en 1.

1) Soit $x\in D$ et *G* la fonction définie par : $\forall y\in D \quad G(y) = F(xy) - xF(y) - xyf(x)$
   a) Démontrer que *G* est une fonction constante.
   b) En comparant $G(1)$ et $G(2)$, montrer que : $\forall x\in D \quad f(x) = \dfrac{F(2x)-xF(2)-F(x)}{x}$.
   c) En déduire que la fonction *f* est dérivable sur *D*.
2) a) Montrer que : $\forall (x,y)\in D^2 \quad xf'(xy) = f'(y)$.
   b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ tel que : $\forall x\in D \quad f'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$.
   c) En déduire qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ tel que : $\forall x\in D \quad f(x) = \alpha \ln x$.
3) Montrer réciproquement que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \ln x$ appartiennent à $\mathscr{L}$.

Exercice 12

Le but de ce problème est de trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ de toutes les fonctions *f* définies et continues sur $\mathbb{R}$, non périodiques, qui vérifient la relation (1) :

$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

A – Préliminaires

Dans cette partie, on suppose que *f* est une fonction qui appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

1) En appliquant la relation (1) à des réels bien choisis :
   a) Quelles sont les seules valeurs possibles de $f(0)$?
   b) Montrer que, si $f(0)=0$, alors *f* est la fonction nulle. Est-ce possible ?
   c) Montrer que *f* est paire.
2) Soit *a* un réel. On suppose que $f(a)=0$.
   a) Soit *x* un réel. Comparer $f(x+2a)$ et $f(x)$.
   b) En déduire que *f* est périodique. Que peut-on en conclure ?
3) Montrer que : $\forall \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.
4) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n\in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ est convergente et calculer sa limite.
5) Pour tout réel *x* :
   a) Trouver une relation entre $f(2x)$ et $f(x)$.
   b) Pour tout entier naturel *n*, comparer le signe de $f(x)-u_{n+1}$ et de $f(2x)-u_n$.
   c) En déduire que : $\forall n\in \mathbb{N} \quad f(x) > u_n$.
   d) Pour tout réel *x*, comparer $f(x)$ et 1.

B – Résolution

Dans cette partie, on suppose que *f* est une fonction qui appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

1) Soit un réel $m \geq 1$ et $q = m+\sqrt{m^2-1}$. On considère la suite (w_n) définie par : $w_0 = 1$, $w_1 = m$ et $\forall n\in \mathbb{N} \quad w_{n+2} = 2mw_{n+1} - w_n$.
   a) Déterminer l'expression de w_n en fonction de *n* dans le cas où $m=1$.
   b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de *n* et *q* dans le cas où $m>1$.
   c) Démontrer que, pour tout $m\geq 1$, on a : $\forall n\in \mathbb{N} \quad q^n = w_n + \sqrt{w_n^2-1}$.

2) Pour tout réel $x>0$, on considère la suite (v_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = f(nx)$.
   a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2f(x)v_{n+1} - v_n$.
   b) Pour tout entier naturel *n*, exprimer $f(nx)$ en fonction de *n* et de $f(x)$.
   c) Pour tout entier naturel *n*, exprimer $\left(f(x)+\sqrt{[f(x)]^2-1}\right)^n$ à l'aide de $f(nx)$.
3) On pose : $a = f(1)+\sqrt{[f(1)]^2-1}$.
   a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{Z} \quad f(n) = \dfrac{1}{2}\left(a^n + \dfrac{1}{a^n}\right)$.
   b) Soit *r* un rationnel. Exprimer $f(r)$ à l'aide de *a* et de *r*.
   c) Pour tout réel *x*, montrer que la suite de terme général $r_n = \dfrac{\mathrm{Ent}(10^n x)}{10^n}$ est une suite de rationnels qui converge vers *x*.
   d) En déduire, pour tout réel *x*, l'expression de $f(x)$ en fonction de *a* et de *x*.
   e) Montrer que $a>1$.

C – Conclusion

En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des solutions du problème.

Exercice 13 (d'après ESG 94 voie S)

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation :

$$(1) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^2$$

Partie A

1) Montrer que la fonction φ définie par : $\varphi(x) = e^{x^2}$ appartient à $\mathscr{F}$.
2) Déterminer toutes les fonctions constantes qui appartiennent à $\mathscr{F}$.
3) Démontrer que si une fonction *f* appartient à $\mathscr{F}$, alors la fonction $h=-f$ appartient aussi à $\mathscr{F}$.

Partie B

Soit *f* une fonction appartenant à $\mathscr{F}$. On suppose qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha)=0$.

1) Que devient la relation (1) lorsque $y=x$?
2) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad f\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)=0$.
3) En déduire que : $f(0)=0$.
4) En déduire que *f* est la fonction nulle.

Partie C

Soit *f* une fonction qui appartient à $\mathscr{F}$ et qui n'est pas la fonction nulle.

1) Quelles sont les seules valeurs possibles pour $f(0)$?
2) En déduire à l'aide de la partie **B**, que : $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)>0$ ou $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)<0$.
3) Montrer que la fonction *f* est paire.

Partie D

Soit *f* une fonction qui appartient à $\mathscr{F}$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)>0$. On lui associe la fonction *g* définie par : $\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x)=\ln[f(x)]$.

1) Montrer que la fonction *g* vérifie la relation :

$$(2) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad g(x+y)+g(x-y) = 2[g(x)+g(y)]$$

2) Calculer $g(0)$.

3) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(nx) = n^2 g(x)$.
4) On pose : $a = g(1)$.
   a) Démontrer que : $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad g\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q^2}$.
   b) En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad g\left(\dfrac{p}{q}\right) = a\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$.
   c) Démontrer que, pour tout réel *x*, la suite de terme général $u_n = \dfrac{\mathrm{Ent}(10^n x)}{10^n}$ converge vers *x*.
   d) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = ax^2$.

Partie E

1) Déduire de ce qui précède l'expression de $f(x)$ pour toute fonction non nulle appartenant à $\mathscr{F}$.
2) Montrer réciproquement que toutes les fonctions *f* ainsi définies appartiennent à $\mathscr{F}$.