Réponses et Indications (Séries numériques)

Exercice 1

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 24$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 3e$.
2) $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont divergentes, $(\sum w_n)$ est convergente.

Exercice 2

1) Utiliser la définition de la limite.
2) Pour $0 \le \ell < 1$, appliquer le 1) à $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$ et majorer $(\sum u_n)$ par une série convergente.

   Pour $\ell > 1$, appliquer le 1) à $\varepsilon = \dfrac{\ell - 1}{2}$ et minorer $(\sum u_n)$ par une série divergente.
3) $(\sum u_n)$ est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

1) Utiliser la définition de la limite.
2) Pour $0 \le \ell < 1$, appliquer le 1) à $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$ et majorer $(\sum u_n)$ par une série convergente.

   Pour $\ell > 1$, appliquer le 1) à $\varepsilon = \dfrac{\ell - 1}{2}$ et minorer $(\sum u_n)$ par une série divergente.
3) $(\sum u_n)$ est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e$.

Exercice 4

Partie A

1) Utiliser par exemple la concavité de ln (il y a d'autres méthodes !).
2) Appliquer le 1) à *k*, puis sommer de 1 à *n*.
3) Série divergente.

Partie B

1) Comparer *k* et k^α.
2) Série divergente si $\alpha \le 1$.

Partie C

1) Utiliser la convexité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
2) et 3) Appliquer le 1) à $\dfrac{1}{k-1}$,puis multiplier l'inégalité par $\dfrac{k-1}{k^\alpha}$.
4) et 5) $S_n \le \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ et (S_n) croissante. Série convergente si $\alpha > 1$.

Exercice 5

1) a) $f''(x) = -\dfrac{\ln x + \alpha + 1}{x^2 (\ln x)^{\alpha+2}}$.

   b) Utiliser le sens de variations de f' et $u_{k+1} = f'(k+1)$.

   c) Inégalité des accroissements finis.

   d) Série convergente. Majorer S_n en sommant de 2 à $(n-1)$ et convergence monotone.
2) Sommer le c) de 1) de *n* à $(p-1)$ et faire tendre *p* vers l'infini.

3) Pour simplifier, on remarque que $\dfrac{1}{10\ln^{10}(n)} < 10^{-6}$ équivaut à $\ln n > \sqrt{10}$.
Initialiser $n := 1$, $S := 0$, puis dans une boucle répéter $n := n+1$ et $S := S + 1/(n * \exp(11 * \ln(\ln n)))$ jusqu'à ce que $\ln(n) > \mathrm{sqrt}(10)$. Afficher S.
On obtient : $S \approx 28{,}303551741$ à 10^{-6} près.

Exercice 6

1) Série divergente si $p = 0$ ou $p = 1$.
2) Exprimer u_n avec des factorielles. Puis récurrence en utilisant a).
3) Calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Convergence monotone vers 0 et $v_n \sim \dfrac{p!}{n^{p-1}}$.
Série $(\sum u_n)$ convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{p-1}$.

Exercice 7

1) Récurrence forte pour montrer l'existence, l'unicité et le signe de u_n. Et $u_3 = \dfrac{4}{15}$.
2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} u_j = +\infty$. Raisonner par l'absurde.
3) Convergence monotone de (u_n). Et $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \dfrac{1}{2n}$, donc la série $\left(\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)$ diverge.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4) Récurrence pour a). Et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$.

Exercice 8

Partie A

1) Utiliser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
2) Série convergente.

Partie B

1) Ch est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
2) Calculer $\mathrm{Ch}\, x - 1$ et utiliser $e^x \underset{0}{\sim} 1$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

Partie C

1) Récurrence pour le sens de variations et le signe.
Théorème du point fixe : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2) Utiliser $v_n = \dfrac{1 - \mathrm{Ch}\, u_n}{\mathrm{Ch}\, u_n}$, les variations de Ch et les propriétés de u_n.
$S_n = \ln u_n$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$. Et $\ln(1 + v_n) \sim v_n$.
3) Utiliser le 2) de B. Les séries $\left(\sum u_n^2\right)$ et $\left(\sum u_n\right)$ sont divergentes.
Attention ! Pour le c), il faut raisonner par l'absurde.

Exercice 9

1) Composition de $u = 1 - e^x = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et de $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.
2) Encadrer $2 - e^{1/k}$ pour $k \geq 2$. La série est divergente à termes négatifs.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3) Pour le a), calculer le second membre. Et $\ln(2-e^{1/k})-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\sim-\frac{1}{2k^2}$. Donc série convergente, donc $\lim_{n\to+\infty} nu_n = K > 0$. La série $\left(\sum u_n\right)$ diverge.
4) (u_n) est décroissante ainsi que (S_{2n}), et (S_{2n+1}) est croissante.
   La série $\left(\sum(-1)^n u_n\right)$ converge. Mais elle n'est pas absolument convergente.