Réponses et Indications (Suites numériques)

Exercice 1

Dans la récurrence, montrer que $2n\sqrt{n+1} \leq (2n+1)\sqrt{n}$ et $(4n+3)\sqrt{n} \leq (4n+1)\sqrt{n+1}$.

$S_n \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 2

$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$ $\quad u_n = \frac{9}{5}\times 4^n - \frac{4}{5}\times(-1)^n$ $\quad v_n = \frac{6}{5}\times 4^n + \frac{4}{5}\times(-1)^n$

Exercice 3

$v_{n+2} = -qv_{n+1} + (3-q^2)v_n - (q^3 - 3q + 2)u_n$. Récurrence linéaire d'ordre 2 si $q \in \{-2,1\}$.

Pour $q = 1$: $v_n = 2 - (-2)^n$. Pour $q = -2$: $v'_n = 6n + 4$.

$u_n = \frac{1}{3}[6n + 2 + (-2)^n]$.

Exercice 4

1) Par récurrence.
2) (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
3) Dans la récurrence, montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
4) et 5) Les deux suites ont même limite $\sqrt{ab}$.
6) La limite est $\sqrt{6}$, par exemple, si $a = 2$ et $b = 3$. Donc initialiser $n := 0$, $u := 2$ et $v := 3$, puis, dans une boucle, répéter $n := n+1$, $w := u$, $u := (2*u*v)/(u+v)$ et $v := (w+v)/2$ jusqu'à ce que $\exp(-n*\ln(2)) < \exp(-9*\ln(10))$. Afficher $(u+v)/2$. On obtient : $\sqrt{6} \approx 2{,}4494897428$ à 10^{-9} près.

Exercice 5

1) (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $u_n = \dfrac{\sin x \cos x}{2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$ a pour limite $\dfrac{\sin x \cos x}{x}$.

2) $a_0 = 1$ $\quad b_0 = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad a_1 = \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x}$ $\quad b_1 = \dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x}$

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ $\quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$

3) Pour l'égalité, utiliser la quantité conjuguée. Puis faire une récurrence pour $a_n < b_n$. (a_n) est croissante et (b_n) décroissante. Les suites sont adjacentes.

4) $\ell = \dfrac{\sin x}{x \cos x}$. Pour le a), faire une récurrence.

Exercice 6

Partie A

$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} P(k)$. Application : $u_n = n^4 - 4n^3 + 5n^2 + 3n - 3$.

Partie B

$u_n = a^n u_0$. Application : $u_n = -3\times 2^n$.

Partie C

$u_n = \frac{b}{1-a} + a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$. Application : $u_n = 2^{n+1} - 5$.

Partie D

$Q(X) = \frac{b}{1-a}X + \frac{c}{1-a} - \frac{b}{(1-a)^2}$ donc $u_n = \frac{bn+c}{1-a} - \frac{b}{(1-a)^2} + a^n\left(u_0 - \frac{c}{1-a} + \frac{b}{(1-a)^2}\right)$.

Application : $u_n = -2^{n+1} - 5n - 1$.

Partie E

(v_n) est géométrique de raison *a*. Donc $u_n = n^k + a^n u_0$. C'est faux pour $k = 0$.

Application : $u_n = n^3 - 3\times 2^n$.

Partie F

1) $d°P_k = k$. On montre par récurrence que $P_0, \ldots, P_p$ forment une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
2) L'un des α_j est non nul. Donc on peut choisir les suites vérifiant les relations de récurrence : $u_{n+1}^{(k)} = au_n^{(k)} + P_k(n)$ avec $u_0^{(j)} = \frac{u_0}{\alpha_j}$ et $u_0^{(k)} = 0$ si $k \neq j$.
3) Application : $u_n = 35\times 2^n - 38 - 23n - 9n^2 - 2n^3$.

Exercice 7

1) Demander à l'utilisateur un entier *n*, lire la valeur, puis initialiser $u := 1$ et faire une boucle de $k := 1$ à *n* avec $u := u * \ln(1 + k/\mathrm{sqr}(n))$. Afficher la valeur de *u*.
2) Etudier les variations, puis le signe des fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x$, ou montrer que $\forall t \geq 0 \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$, et intégrer entre 0 et *x*.
3) Appliquer l'inégalité à $\frac{k}{n^2}$ et sommer de 1 à *n*.
4) et 5) $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{e}$.

Exercice 8

Partie A

1) Demander à l'utilisateur un entier *n*, lire la valeur, puis initialiser $H := 0$ et faire une boucle de $k := 1$ à *n* avec $H := H + 1/k$. Afficher la valeur de *H*.
2) Utiliser l'inégalité des accroissements finis (ou de la moyenne) entre *x* et $x+1$.
3) Appliquer l'inégalité à *k* et à $k-1$, puis sommer de 2 à *n*.
4) $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et $H_n \sim \ln n$.

Partie B

1) (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.
2) Les suites sont adjacentes.
3) Utiliser $v_n \leq \gamma \leq u_n$ et la 2) de la partie A.
4) Demander à l'utilisateur un réel epsilon, lire la valeur, puis initialiser $H := 0$ et faire une boucle jusqu'à ce que $1/n <$ epsilon avec $H := H + 1/k$. Afficher $H - \ln(n)$. Par exemple : $\gamma \approx 0{,}57726565936$ à 10^{-4} près est obtenu pour $n = 1001$.

Partie C

1) $f'(x) = \dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$. Minorer $x+1$.
2) Intégrer l'inégalité précédente (écrite pour *t*) entre 0 et *x*.
3) Etudier le signe de la différence.
4) Appliquer le 2) à $\dfrac{1}{k}$, utiliser le 3) et sommer de n à $n+p$.

Partie D

1) Somme télescopique, puis faire tendre *p* vers l'infini.
2) $w_{k+1} - w_k = f\left(\dfrac{1}{k}\right)$.
3) Utiliser le 4) du C et faire tendre *p* vers l'infini.
4) Demander à l'utilisateur un réel epsilon, lire la valeur, initialiser $H := 0$ et faire une boucle jusqu'à ce que $1/(12*(n-1)*(n-1)) <$ epsilon avec $H := H + 1/k$. Afficher $H - \ln(n) - 1/(2*n)$.

   Ici $\gamma \approx 0{,}57712308258$ à 10^{-4} près est obtenu pour $n = 30$.

Exercice 9

1) $f'(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. Donc *f* est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$.
2) $\alpha = \ln(e-1)$. Récurrence pour $u_n \in [0,1]$.

   Majorer $|f'(x)|$ en calculant $f''(x) = -\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.

   Ensuite, inégalité des accroissements finis, puis récurrence. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

   Programmation : Initialiser $n := 0$ et $u := 0$, puis dans une boucle répéter $n := n+1$ et $u := u + 2 - 2*\ln(1+\exp(u))$ jusqu'à ce que $\exp(n*\ln((\exp(1)-1)/(\exp(1)+1))) < \exp(-6*\ln(10))$. Afficher *u*.

   On obtient : $n = 18$ et $\alpha \approx 0{,}5413248546$ à 10^{-6} près.

Exercice 10

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Branche parabolique de direction *Oy*.
2) *f* est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$ (mais pas en 0).
3) $f''(x) = \dfrac{2x-1}{x}$. Donc *f* est concave sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et convexe sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
4) *f* est strictement croissante. Utiliser les variations de f' pour trouver son signe.
5) Bijection de $]0, +\infty[$ dans $J =]-1, +\infty[$.
6) f^{-1} est strictement croissante sur *J* et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

Partie B

1) Par bijection $x_k = f^{-1}(k)$ car $k \in]0, +\infty[$.
2) $x_0 = 1$.
3) Comparer $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ et $f(2)$ avec 1 et utiliser le sens de variations de *f* ou f^{-1}.
4) Utiliser le sens de variations de f^{-1}.
5) $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Utiliser le 6) de A.

Partie C

1) $\varphi'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$. Donc φ est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$. Utiliser la continuité et le sens de variations pour trouver $\varphi(I)=\left[1+\ln 2,\dfrac{4}{3}+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$.
2) $\varphi''(x)=\dfrac{4-x}{x^3}$. Donc φ' est croissante sur *I*.
3) Equations équivalentes, donc même ensemble de solutions.
4) Récurrence. Utiliser $\varphi(I)\subset I$.
5) 6) 7) Inégalité des accroissements finis, puis récurrence, puis limite.
8) Initialiser $n:=0$ et $u:=\dfrac{3}{2}$, puis dans une boucle répéter $n:=n+1$ et $u:=2/u+\ln(u)$ jusqu'à ce que $\exp(n*\ln(2/9))/2<\exp(-6*\ln(10))$. Afficher *u*.
   On obtient : $x_1\approx 1{,}7064399907$ à 10^{-6} près.

Partie D

1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=e^y-ye^x$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xe^y-e^x$.
2) Unique point critique $(1,1)$. Résoudre $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$.
3) Ce n'est pas un extremum local car $rt-s^2<0$.

Exercice 11

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.
2) $f'_n(x)=\dfrac{x-n}{x}$.

x	0		n		$+\infty$
f'_n		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln n)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Appliquer le théorème de bijection sur $I=]0,n]$ et sur $J=]n,+\infty[$ et étudier le signe de $n(1-\ln n)$.
4) Utiliser le sens de variations de f_n sur *I* et sur *J*.

Partie B

1) Utiliser le sens de variations de f_n sur *I*.
2) Calculer $f_n(u_{n+1})$ et utiliser $f_{n+1}(u_{n+1})=0$. La suite (u_n) est décroissante.
3) Théorème de convergence monotone.
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$. Utiliser $f_n(u_n)=0$, puis le théorème d'encadrement.
5) Déduire un équivalent de $\ln u_n$, puis utiliser $\ln x \underset{1}{\sim} x-1$.

Partie C

1) Utiliser l'inégalité du 3) de A.
2) $f_n(n\ln n)=-n\ln(\ln n)$. Utiliser le sens de variations de f_n sur *J*.
3) Le minimum de f_2 est positif.
4) Utiliser le sens de variations de f_n sur *J* et le 3).
5) Encadrer $\ln v_n$, puis utiliser $f_n(v_n)=0$ pour encadrer $\dfrac{v_n}{n\ln n}$.

Exercice 12

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=1$.
2) $f'_n(x)=\dfrac{2n}{(x+n)^2}+e^{-x}$. Donc f_n est strictement croissante.
3) Théorème de bijection.
4) Utiliser le sens de variations de f_n.
5) $n<u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. Etudier le signe de $f_n(n)$.
6) $f_n(n+1)>0$ et $u_n \sim n$. Pour le signe, étudier les variations de $\varphi(x)=e^{x+1}-2x-1$.
7) Montrer $a_n=(u_n+n)e^{-u_n}$ et utiliser le 5). Utiliser $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ pour $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n a_n}{n}=2$ et $u_n-n \sim 2ne^{-n}$. Montrer que $\dfrac{e^n a_n}{n}=\dfrac{a_n+2n}{n}e^{-a_n}$.

Exercice 13

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
2) f est strictement croissante.
3) Théorème de bijection.
4) $\alpha_1=1$.
5) (α_n) est croissante. Utiliser le sens de variations de f ou de f^{-1}.

Partie B

1) Utiliser la convexité de $x\mapsto \ln x$ ou étudier les variations et le signe de $x\mapsto x-\ln x$.
2) Utiliser le 1) et $f(\alpha_n)=n$.
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n=+\infty$.

Partie C

1) Utiliser le 2) de B pour encadrer $\ln\alpha_n$, puis utiliser $f(\alpha_n)=n$.
2) Utiliser $f(\alpha_n)=n$ et $f(\alpha_{n+1})=n+1$, ainsi que l'équivalent de α_n.
3) Utiliser $\alpha_n \sim n$ et $\ln x \underset{1}{\sim} x-1$ pour trouver la limite de $n(1-u_n)$.

   Attention! $\alpha_n \sim n$ ne prouve pas $\ln\alpha_n \sim \ln n$.

   Pour le d), utiliser la définition de l'équivalence.

Exercice 14

1) Récurrence.
2) Utiliser la concavité de $x\mapsto\sqrt{x}$.
3) Récurrence.
4) Encadrer $\dfrac{u_{n-1}}{n^2}$ pour trouver sa limite et en déduire celle de $\dfrac{u_n}{n}$, d'où $u_{n-1}=o(n)$.
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\dfrac{1}{2}$. Utiliser la quantité conjuguée.
6) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-u_{n-1})=0$. Puis utiliser la définition de la limite.
7) Utiliser la quantité conjuguée, puis le 6).
8) Demander à l'utilisateur un entier *n*, lire la valeur, puis initialiser $u:=1$ et faire une boucle de $k:=1$ à n avec $u:=\mathrm{sqrt}(k+u)$. Afficher la valeur de *u*.

   Par exemple : $u_{10}\approx 3{,}6759797166$.

Exercice 15

Partie A

1) Montrer d'abord la monotonie, puis le signe.
2) $\ell = 0$. Théorème du point fixe.
3) Contradiction entre le 1) et le 2).

Partie B

2) Montrer d'abord : $\forall k \geq n \quad 0 < \ln\left(1+\dfrac{1}{u_k}\right) \leq \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$, puis sommer $v_{k+1} - v_k$ de n à $n+p-1$.
3) Appliquer le 2) à $n = 0$ pour montrer $v_p \leq \ln(a+1)$, puis convergence monotone.
4) Majorer v_n par sa limite.
6) Par encadrement de u_n.
7) $0 \leq w_n \leq 1$, puis calculer $w_{n+1} + w_n^2 - w_n$.
8) Par encadrement, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$.

Partie C

1) Faire tendre p vers l'infini dans l'inégalité du 2) de B, puis minorer u_n.
2) Initialiser $n := 0$ et $u := 1$, puis dans une boucle répéter $n := n+1$ et $u := u + \text{sqr}(u)$ jusqu'à ce que $\exp(-n * \ln(2)) < \exp(-2 * \ln(10))$. Calculer $v := \ln(u) / \exp(n * \ln(2))$ et afficher la valeur de v.
   On obtient : $\alpha \approx 0{,}4686966618$ à 10^{-2} près.

Exercice 16

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	$-\infty$

2) Récurrence sur $\mathbb{N}^*$, puis vérification pour $n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3) (v_n) est croissante et majorée par 1. Et $\ell \geq v_1$.
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell(1-\ell)$.
5) Pour a), utiliser la définition de la limite pour $\varepsilon = \dfrac{\ell(1-\ell)}{2}$. Puis sommer de n à $(2n-1)$. Contradiction avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{2n} - v_n) = 0$.
6) Donc $\ell = 1$.

Exercice 17

Partie A

1) Théorème de bijection pour la fonction $g_p \ : \ x \mapsto f_p(x) - x$ sur $]0,+\infty[$.
2) Utiliser le sens de variations de g_1.
3) Comparer g_p et g_{p+1} et en déduire le signe de $g_p(\alpha_{p+1})$.
4) $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_p = +\infty$. Utiliser le sens de variations de f_p pour comparer $f_p(\alpha_p)$ et $f_p(0)$.

Partie B

1) Récurrence.
2) Théorème du point fixe : $\ell = \alpha_1$.

3) Montrer : $\forall x \in [1,+\infty[\quad |f'_1(x)| \leq \dfrac{1}{2}$. Puis inégalité des accroissements finis.

4) et 5) Récurrence et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha_1$.

Initialiser $n := 0$ et $u := 1$, puis dans une boucle répéter $n := n+1$ et $u := 1 + \ln(u+1)$ jusqu'à ce que $\exp(-(n-1) * \ln(2)) < \exp(-4 * \ln(10))$. Afficher la valeur de *u*. On obtient : $\alpha_1 \approx 2{,}1461931661$ à 10^{-4} près.

Exercice 18

Partie A

1) $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\quad f'_k(x) = \dfrac{(kx - k - x\ln x)(\ln x)^{k-1}}{x(x-1)^2}$.

2) $f'_k(1) = 0$ si $k \geq 3$ et $f'_2(1) = 1$. Chercher la limite du taux d'accroissement.

3) $\varphi'_k = k - \ln x - 1$. Donc φ_k est croissante sur $]0, e^{k-1}]$ et décroissante sur $[e^{k-1},+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0} \varphi_k(x) = -k$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_k(x) = -\infty$ et $\varphi_k(e^{k-1}) = e^{k-1} - k$.

Pas de solution sur $]1, e^{k-1}[$, puis théorème de bijection pour φ_k sur $[e^{k-1},+\infty[$.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = -\infty$ si *k* pair et $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = +\infty$ si *k* impair.

5) Etudier le signe de $\varphi_k(x)(\ln x)^{k-1}$. Séparer en 3 cas :

$k = 2$

x	0		1		a_2		$+\infty$
f'_2		$+$	1	$+$	0	$-$	
f_2	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$k > 2$ pair

x	0		1		a_k		$+\infty$
f'_k		$+$	0	$+$	0	$-$	
f_k	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$k > 2$ impair

x	0		1		a_2		$+\infty$
f'_k		$+$	1	$+$	0	$-$	
f_k	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Partie B

1) Utiliser le sens de variations de φ_k et le signe de $\varphi_k(e^k)$.

2) Pour le a), utiliser $\varphi_k(a_k) = 0$, puis majorer $|\ln(1+\delta_k)|$ avec le 1).

$\lim\limits_{k \to +\infty} \delta_k = 0$. Puis utiliser $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

3) Utiliser la définition de la négligeabilité.

Exercice 19

Partie A

1) La suite n'est pas monotone.

2) Utiliser : $\forall k \geq 1 \quad a_k = a_{k-1}$.

3) Récurrence.

4) $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Théorème du point fixe.
5) Utiliser l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
6) Récurrence.
7) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B

1) Récurrence double.
2) $b_{n+1} = -b_n$ et $b_n = (-1)^{n-1}$.
3) $u_k - u_{k-1} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$. Sommer de 1 à *n*.
4) (v_n) est croissante, (w_n) décroissante, et $v_n \le w_n$. Convergence monotone.
5) $\alpha = \mathrm{Min}(1, a_1)$. Etudier le sens de variations des suites (q_{2n}) et (q_{2n+1}).
   Sommer l'expression de b) pour minorer c_n.
   Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes pour la convergence de (u_n).
6) Pour le a), récurrence double. Pour le b), convexité de $x \mapsto e^x$.
   Pour la divergence de (u_n), montrer que $u_n - u_{n-1}$ ne tend pas vers 0.

Exercice 20

Partie A

1) Etudier le signe de la différence.
2) *f* et *g* sont strictement croissantes.
3) En déduire le signe de $f(x)$ et de $g(x)$.

Partie B

1) Récurrences et utilisation de la quantité conjuguée. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2) (T_n) est croissante et (S_n) est décroissante. Convergence monotone.
   $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{2^n}\ln x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln x$.
3) Calculer $\dfrac{1+C_n}{2}$ et comparer avec C_{n+1}, puis calculer $\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$.
4) Demander à l'utilisateur un réel *x* et un entier *p*, lire les valeurs, initialiser $n := 0$, $C := (x * x + 1)/(2 * x)$, $S := (x * x - 1)/(2 * x)$ et $T := S / C$, puis dans une boucle répéter $n := n + 1$, $C := \mathrm{sqrt}((1 + C)/2)$, $S := S / C$ et $T := S / C$ jusqu'à ce que $S - T < \exp(-p * \ln(10))$. Afficher les valeurs de *n* et de *S* (valeur approchée de $\ln x$). Par exemple : $\ln 2 \approx 0{,}69314802748$ à 10^{-5} près.

Partie C

1) Encadrer $f'(t)$ et $g'(t)$, puis intégrer entre 0 et *x*.
2) $\alpha = \dfrac{1}{6}$ et $\beta = \dfrac{1}{3}$. Appliquer le 1) à $f(u_n)$ et $g(u_n)$.

Exercice 21

Partie A

1) Ne pas oublier qu'il y a deux propriétés à vérifier : C^∞ et la relation.
2) Justifier que f_{n+1} est C^∞, puis dériver et utiliser la relation.
3) $f_1(x) = (2-x)e^{x/2}$, $f_2(x) = (x^2 - 6x + 12)e^{x/2}$, $f_3(x) = (-x^3 + 12x^2 - 60x + 120)e^{x/2}$.

Partie B

1) $P_0(x)=1$, $P_2(x)=x^2-6x+12$, $P_3(x)=-x^3+12x^2-60x+120$.
2) Utiliser le 3) b).
3) 4) et 5) Récurrences doubles. P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.
6) Exprimer $P_{n+1}(0)$ en fonction de $P_n(0)$.
7) Comme il s'agit de récurrences doubles, il faut introduire trois variables : P qui contiendra P_k, Q qui contiendra P_{k-1} et R qui contiendra P_{k-2}.
Demander à l'utilisateur un réel x et un entier n, lire les valeurs, initialiser $Q:=1$ et $P:=2-x$, puis faire une boucle de $k:=2$ à n avec $R:=Q$, $Q:=P$ et $P:=2*(2*k-1)*Q+x*x*R$. Afficher la valeur de P.

Partie C

1) Calculer $g_n(-x)$.
2) Utiliser le 2) a) de A. Attention à la dérivation de $f_{n+1}(-x)$ (composée de fonctions).
3) Dans l'hérédité, utiliser l'hypothèse de récurrence pour encadrer $g'_{n+1}(t)$, puis intégrer entre 0 et x.

Partie D

1) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $P_n(x)$ et $P_n(-x)$.
2) Récurrence double pour le a), puis utiliser la parité de g_n et la majoration sur $\mathbb{R}^+$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=e^x$ si $x\le 0$.
3) $u_n(x)=\dfrac{1}{u_n(-x)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=e^x$ si $0<x<2$.
4) a) Si n est pair, utiliser le signe de $P_n(x)$ sur $\mathbb{R}^-$, et $f_n(x)=f_n(-x)+g_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Si n est impair, f_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Théorème de bijection pour l'existence de a_p. Utiliser le sens de variations de f_n pour le signe.
   c) Si $n=2p\neq 0$, f_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $[0,a_{p-1}]$ et croissante sur $[a_{p-1},+\infty[$.
   d) $a_p<a_{p+1}$ car $f_{2p+3}(a_p)>0$. Montrer $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p+1}(-\ell)=e^{-\ell}$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{f_{2p+1}(\ell)}{f_{2p+1}(-\ell)}=1$.
   Contradiction avec le signe du quotient, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p=+\infty$ et $\exists p_x \quad a_{p_x}>x$.
   e) $u_n(x)=\dfrac{1}{u_n(-x)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=e^x$ si $x\ge 2$.

Partie E

1) a) Utiliser le sens de variations de f_{n-1} pour encadrer f'_n, puis intégrer entre x et 0.
   b) Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{P_n(x)}{P_n(0)e^{x/2}}=1$ sur $\mathbb{R}^-$, puis utiliser la parité et $u_n(x)\sim e^x$.
2) Exprimer $|u_{n+1}(x)-u_n(x)|$ avec le 1) de D, et montrer que les quotients $\dfrac{g_n(x)}{P_n(x)}$ et $\dfrac{g_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}$ sont de même signe. Récurrence pour le b).
3) $u_{n+1}(x)-u_n(x)\sim\dfrac{2(-1)^n x^{2n+1}e^x}{P_n(0)P_{n+1}(0)}$ donc $\dfrac{u_{n+2}(x)-u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x)-u_n(x)}\sim-\dfrac{x^2}{16n^2}$.

Montrer par récurrence sur p que $\begin{cases} u_{n+p+1}(x) - u_{n+p}(x) = o\big(u_{n+1}(x) - u_n(x)\big) \\ u_{n+p}(x) - u_n(x) \sim u_{n+1}(x) - u_n(x) \end{cases}$.

En déduire un équivalent de $u_{n+p}(x) - u_n(x)$ et faire tendre p vers l'infini.

Utiliser ensuite un équivalent de $P_n(0)$ à l'aide de la formule de Stirling.