SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

1) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2n+1}{3}\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \le \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.
2) En déduire un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 2

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par leurs premiers termes $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$, et par les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$.

1) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de u_n.
2) En déduire le calcul de u_n, puis de v_n en fonction de n.

Exercice 3 (d'après ESSEC voie E)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

1) Soit q un réel. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - qu_n$. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1}, v_n et u_n.
2) En déduire qu'il existe deux valeurs de q pour lesquelles la suite (v_n) suit une récurrence linéaire d'ordre 2. On notera (v_n) et (v'_n) les deux suites obtenues.
3) En déduire l'expression de v_n et v'_n en fonction de n.
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$ et $v_0 = b$, et les relations : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \le v_n$.
2) En déduire le sens de variations des suites (u_n) et (v_n).
3) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b-a)$.
4) Montrer que les deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
5) Montrer que la suite de terme général $u_n v_n$ est constante. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) en fonction de a et b.
6) En déduire un programme en Turbo-Pascal permettant de calculer une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{6}$.

Exercice 5 (EDHEC 1996 voie S)

Dans cet exercice, x désigne un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.
   a) Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de x et n.

c) Montrer enfin que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

2) On considère le programme suivant qui permet le calcul des $(n+1)$ premiers termes de deux suites (a_n) et (b_n) :

```
Program Suites ;
var x, a, b : real ;
      k, n : integer ;
Begin
      Readln(x) ;
      Readln(n) ;
      a := 1 ;
      b := 1 / cos(x) ;
      For k := 1 to n do
            begin
            a := (a + b) / 2 ;
            b := sqrt(a * b) ;
            end ;
      Writeln(a, b) ;
End.
```

a) Préciser leurs premiers termes a_0 et b_0 en fonction de x.

b) Calculer a_1 et b_1 en fonction de x.

c) Ecrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les relations de récurrence liant a_n, b_n, a_{n-1} et b_{n-1}.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

3) a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n - a_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < b_n$.

c) En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

d) En utilisant le 3) a), montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < b_n - a_n \leq \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)$.

e) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont la même limite ℓ.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = \dfrac{u_n \cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\cos^2 x}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2 x}$.

b) En déduire la valeur de ℓ.

<u>**Exercice 6 (Mines 2001)**</u>

La dernière partie de cet exercice fait appel aux espaces vectoriels.

Dans tout l'exercice, on considère un réel a non nul et un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

Soit (u_n) une suite réelle qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$

<u>**Partie A**</u>

On suppose dans cette partie que $a = 1$.

1) En calculant $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et des valeurs prises par P.

2) <u>Application</u> : Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 4n^3 - 6n^2 + 2n + 5$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose a différent de 0 et de 1.

Partie B

On suppose dans cette partie que P est le polynôme nul.

1) Préciser la nature de la suite (u_n) et en déduire l'expression de u_n en fonction de n, a et u_0
2) Application : Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n$.

Partie C

On suppose dans cette partie que P est un polynôme constant : $P(X) = b$.

1) Préciser la nature de la suite (u_n) et en déduire l'expression de u_n en fonction de n, a, b et u_0
2) Application : Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 5$.

Partie D

On suppose dans cette partie que P est un polynôme de degré 1 : $P(X) = bX + c$.

1) Montrer qu'il existe un polynôme $Q(X) = rX + s$ tel que la suite de terme général $v_n = u_n - Q(n)$ soit géométrique.
2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, a, b, c et u_0.
3) Application : Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 5n - 4$.

Partie E

On suppose dans cette partie que : $P(X) = (X+1)^k - aX^k$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer la nature de la suite de terme général $v_n = u_n - n^k$.
2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, k, a et u_0. Cette expression est-elle encore valable si $k = 0$?
3) Application : Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

Partie F

On étudie maintenant le cas général, donc on suppose que P est un polynôme de degré $p \geq 1$ et (u_n) une suite réelle qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme : $P_k(X) = (X+1)^k - aX^k$.
   a) Déterminer le degré du polynôme P_k.
   b) En déduire que les polynômes P_0, P_1, …, P_p sont linéairement indépendants.
   c) En déduire qu'il existe des coefficients α_k tels que : $P(X) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k P_k(X)$.
2) Montrer qu'il existe des suites $(u_n^{(k)})$ pour $k \in [\![0, p]\!]$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k u_n^{(k)}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}^{(k)} = au_n^{(k)} + P_k(n)$.
3) Application : Calculer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 2n^3 + 3n^2 - n + 4$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

1) Ecrire un programme en Turbo-Pascal demandant à l'utilisateur un entier n et affichant la valeur de u_n.
2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n+1}{2n} - \frac{2n^2+3n+1}{12n^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n+1}{2n}$.
4) En déduire la limite de $v_n = \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
5) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (d'après ESSEC 88 voie S)

On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Partie A

1) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur un entier n et qui affiche la valeur de H_n.
2) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.
3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$.
4) En déduire la limite de H_n et un équivalent de H_n quand n tend vers l'infini.

Partie B

On considère les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

1) Etudier le sens de variations des suites (u_n) et (v_n).
2) En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) ont une limite commune. Cette limite, notée γ, s'appelle la constante d'Euler.
3) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n - \ln n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq H_n - \ln n$.
4) En déduire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur un réel $\varepsilon > 0$ et qui calcule une valeur approchée de γ à ε près.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2(x+1)} - \ln(1+x)$.

1) Démontrer que : $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{x^2}{2}$
2) En déduire que : $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{6}$.
3) Pour tout entier $k \geq 2$, démontrer que : $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}$.
4) En déduire que, pour tous les entiers $n \geq 2$ et $p \geq 0$: $0 \leq \sum_{k=n}^{n+p} f\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{12(n-1)^2}$.

Partie D

On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = H_n - \ln n - \dfrac{1}{2n}$.

1) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{k=n}^{n+p} (w_{k+1} - w_k) = \gamma - w_n$.

2) Exprimer $w_{k+1} - w_k$ en fonction de $f\left(\dfrac{1}{k}\right)$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$: $0 \leq \gamma - \left(H_n - \ln n - \dfrac{1}{2n}\right) \leq \dfrac{1}{12(n-1)^2}$.

4) En déduire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur un réel $\varepsilon > 0$ et qui calcule une valeur approchée de γ à ε près plus rapidement que dans la partie **B**.

Exercice 9 (d'après ECRICOME 2003 voie T)

1) Etudier les variations de la fonction *f* définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$.
2) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Si la suite (u_n) converge, quelle est la seule limite α possible ?
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0,1]$. On donne : $\ln 2 \approx 0{,}7$ et $\ln(e+1) \approx 1{,}3$.
   c) Montrer que : $\forall x \in [0,1] \quad |f'(x)| \leq \dfrac{e-1}{e+1}$.
   d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{e-1}{e+1}|u_n - \alpha|$.
   e) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)^n$.
   f) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   g) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule *n* pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près et qui affiche cette valeur approchée.

Exercice 10 (d'après Ecricome 2005 voie E)

La dernière partie de cet exercice fait appel aux fonctions de deux variables.

On considère la fonction *f* définie par $f(0) = -1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^2 - x\ln x - 1$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}7$ et $\ln 3 \approx 1{,}1$.

Partie A : Etude de la fonction

1) Etudier la limite de *f* en $+\infty$. Préciser la nature de la branche infinie.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* sur $\mathbb{R}^+$.
3) Etudier la convexité de *f* sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) En déduire le tableau de variations de *f*.
5) Montrer que *f* réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle *J* que l'on précisera.
6) Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque *x* tend vers l'infini.

Partie B : Etude d'une première suite

1) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_k > 0$ tel que $f(x_k) = k$. Exprimer x_k à l'aide de f^{-1}.
2) Donner la valeur de x_0.

3) Démontrer que x_1 appartient à l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
4) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \leq x_{k+1}$.
5) Déterminer la limite de x_k lorsque k tend vers l'infini.

Partie C : Etude d'une deuxième suite

Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln x$.

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\varphi(I) \subset I$.
2) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in I \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.
3) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$.
6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - x_1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^n$.
7) En déduire la limite de la suite (u_n).
8) Ecrire un programme permettant de calculer une valeur approchée de x_1 à 10^{-6} près.

Partie D : Etude d'une fonction de deux variables

Soit g la fonction définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x, y) = xe^y - ye^x$.

1) Calculer les dérivées partielles premières de g.
2) En déduire que g admet un seul point critique.
3) Ce point est-il un extremum local de g ?

Exercice 11 (d'après EDHEC 97 voie E)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = x - n\ln x$.

Partie A : Etude de la fonction

1) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f_n.
2) Etudier les variations de la fonction f_n et dresser son tableau de variations.
3) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ a deux solutions que l'on notera u_n et v_n qui vérifient : $0 < u_n < n < v_n$.
4) En déduire, pour tout entier $n \geq 3$, le signe de $f_n(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la suite *u*

On suppose que $n \geq 3$.

1) Montrer que : $1 < u_n < e$.
2) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ et en déduire le sens de variations de la suite (u_n).
3) En déduire que la suite (u_n) converge.
4) Démontrer que $\frac{1}{n} < \ln(u_n) < \frac{e}{n}$. En déduire la limite de (u_n).
5) Montrer que : $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

Partie C : Etude de la suite *v*

On suppose toujours que $n \geq 3$.

1) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
2) Calculer $f_n(n \ln n)$, puis montrer que $n \ln n < v_n$.
3) En utilisant les variations de f_2, démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad x > 2\ln x$.
4) En déduire que : $n \ln n < v_n < 2n \ln n$.
5) En déduire un encadrement de $\ln(v_n)$, puis montrer enfin que : $v_n \sim n \ln n$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1) Etudier la limite de la fonction f_n en $+\infty$.
2) Etudier les variations de la fonction f_n.
3) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n.
4) En déduire le signe de $f_n(x)$ suivant les valeurs de *x*.
5) Comparer u_n et *n*, puis en déduire la limite de u_n.
6) Déterminer le signe de $f_n(n+1)$, et en déduire un équivalent de u_n.
7) On se propose d'étudier la suite de terme général $a_n = u_n - n$.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < a_n < 2u_n e^{-u_n}$
   b) En déduire la limite de la suite (a_n).
   c) En explicitant la relation $f_n(n + a_n) = 0$, calculer la limite de $\dfrac{e^n}{n} a_n$.
   d) En déduire un équivalent de $u_n - n$.

Exercice 13 (HEC voie E ?)

Partie A

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = x + \ln x$.

1) Etudier les limites de la fonction *f* en 0 et en $+\infty$.
2) Etudier les variations de la fonction *f*.
3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) : $x + \ln x = n$ admet une unique solution α_n.
4) Donner la valeur de α_1.
5) Etudier le sens de variations de la suite (α_n).

Partie B

1) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \ln x < x$.
2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{n}{2} \leq \alpha_n \leq n$.
3) En déduire la limite de α_n quand *n* tend vers l'infini.

Partie C

1) Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln \alpha_n}{n} = 0$ et en déduire que $\alpha_n \sim n$.
2) Calculer la limite de $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ quand *n* tend vers l'infini.
3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{n - \alpha_n}{\ln n}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)}{\ln n}$.

b) Calculer la limite de u_n quand n tend vers l'infini.

c) Démontrer que : $1 - u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

d) En déduire qu'il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

<u>Exercice 14 (d'après Ecricome 2005 voie S)</u>

On définit une suite réelle (u_n) par $u_0 \geq 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \sqrt{n}$.
2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}(1+x)$.
3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$.
4) En déduire les limites des suites $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)$ et $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$. En déduire que : $u_n \sim \sqrt{n}$.
5) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n - \sqrt{n}$. Montrer que la suite (w_n) a une limite ℓ que l'on précisera.
6) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - u_{n-1})$. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
7) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
8) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur un entier n et qui affiche la valeur de u_n lorsque $u_0 = 1$.

<u>Exercice 15 (Ecricome 2003 voie S)</u>

Soit a est un réel strictement positif.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$.

<u>Partie A : Etude de la convergence de la suite</u>

1) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et monotone.
2) Si la suite (u_n) convergeait vers un réel ℓ, quelle serait la valeur de ℓ ?
3) En déduire que la suite (u_n) diverge vers l'infini.

<u>Partie B : Etude du comportement asymptotique de la suite</u>

On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

1) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
2) En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n : $0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
3) Démontrer que la suite (v_n) est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α (que l'on ne demande pas de calculer).

4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \le e^{\alpha 2^n}$.
5) En faisant tendre p vers l'infini pour n fixé dans l'encadrement du 2), montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{\alpha 2^n} \le u_n + 1$.
6) En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant : $u_n \sim e^{\alpha 2^n}$.
7) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = e^{\alpha 2^n} - u_n$. Montrer que la suite (w_n) est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2w_n - 1 = [w_{n+1} + (w_n)^2 - w_n]e^{-\alpha 2^n}$.
8) Prouver enfin que, lorsque n tend vers l'infini : $u_n = -\dfrac{1}{2} + e^{\alpha 2^n} + o(1)$.

Partie C : Calcul approché

Dans cette partie, on suppose que : $a = 1$.

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le \alpha - v_n \le \dfrac{1}{2^n}$.
2) En déduire un programme en Turbo-Pascal qui calcule une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.

Exercice 16 (EDHEC 95 voie S)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1) Etudier les variations de la fonction *f* définie par : $f(x) = x(1-x)$.
2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la convergence de (u_n).
3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = nu_n$.
   a) Etudier le sens de variations de la suite (v_n).
   b) En déduire que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \in]0,1]$.
4) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_n(1 - u_n - v_n)$.
   b) En déduire que la suite (w_n) converge et calculer sa limite en fonction de ℓ.
5) On suppose dans cette question que $\ell \ne 1$.
   a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \ge n_0 \quad v_{n+1} - v_n \ge \dfrac{\ell(1-\ell)}{2n}$.
   b) En déduire que : $\forall n \ge n_0 \quad v_{2n} - v_n \ge \dfrac{\ell(1-\ell)}{4}$.
   c) Montrer que ce résultat est en contradiction avec le 3) b).
6) En déduire que : $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 17 (d'après Ecricome 2008 voie E)

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_p par : $f_p(x) = 1 + \ln(x + p)$.

Partie A

1) Montrer que l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que : $\alpha_1 \in [1,3]$.
3) Montrer que la suite (α_p) est monotone.
4) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_p \ge 1 + \ln p$. En déduire la limite de α_p à l'infini.

Partie B

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_1(u_n)$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \ge 1$.

2) Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ?
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$.
4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
5) En déduire la convergence de la suite (u_n).
6) Ecrire un programme en Turbo-Pascal pour afficher une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près.

Exercice 18 (ESCP 1999 voie E)

Pour tout entier $k \geq 2$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction f_k par :

$$f_k(x) = \frac{(\ln x)^k}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \quad \text{et} \quad f_k(1) = 0.$$

Partie A

1) Montrer que f_k est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2) Montrer que f_k est dérivable en 1 et calculer $f'_k(1)$ suivant les valeurs de *k*.
3) On considère la fonction φ_k définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln x$.
   a) Etudier les variations de φ_k sur $]0,+\infty[$.
   b) Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution a_k sur $]1,+\infty[$.
4) Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
5) Tracer le tableau de variations de f_k en distinguant les cas $k = 2$, *k* entier pair supérieur ou égal à 4, et *k* entier impair supérieur ou égal à 3.

Partie B

1) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$.
2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose : $a_k = e^k(1+\delta_k)$.
   a) Montrer que le réel δ_k vérifie : $-ke^{-k} = (1+\delta_k)\ln(1+\delta_k)$.
   b) Justifier l'inégalité : $|\ln(1+\delta_k)| \leq ke^{1-k}$, et en déduire $\lim_{k\to+\infty} \delta_k$.
   c) Montrer que δ_k est équivalent à $-ke^{-k}$ en $+\infty$.
3) En déduire que : $a_k = e^k - k + o(k)$ quand *k* tend vers $+\infty$.

Exercice 19

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. Pour tout entier naturel *n*, on pose :

$$u_0 = a_0 \qquad u_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \qquad u_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \qquad \ldots \qquad u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

On se propose de chercher à quelle condition sur (a_n), la suite (u_n) converge.

Partie A : Etude d'un exemple

Dans cette partie, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1$.

1) La suite (u_n) est-elle monotone ?
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 2$.

4) Si la suite (u_n) converge, quelle sera sa limite ℓ ?

5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{\ell}|u_n - \ell|$.

6) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{\ell}\right)^{n+1}$.

7) En déduire la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Etude du cas général

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_0(x) = a_0 + x$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + x}}}}}$.

1) Montrer qu'il existe deux suites (p_n) et (q_n) qui vérifient $\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} p_1 = 1 + a_0 a_1 \\ q_1 = a_1 \end{cases}$

et $\forall n \geq 2 \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(x) = \dfrac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f_n(0) = \dfrac{p_n}{q_n}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$.
   a) Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.
   b) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

3) Calculer $u_n - u_{n-1}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   a) Etudier le sens de variations de la suite (v_n).
   b) Etudier le sens de variations de la suite (w_n).
   c) Montrer que ces deux suites sont convergentes.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = q_n q_{n-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n \geq \alpha$.
   b) Montrer que : $\forall n \geq 2 \quad c_n - c_{n-1} \geq \alpha^2 a_n$.
   c) En déduire que si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = +\infty$.
   d) En déduire que si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, la suite (u_n) est convergente.

6) On note toujours : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n \leq \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k)$.
   b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x \leq e^x$.
   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n \leq e^{S_n}$.
   d) En déduire que si la suite (S_n) est convergente, alors la suite (u_n) est divergente.

Exercice 20 (d'après ESSEC 1989 voie E)

Le but de l'exercice est d'étudier un algorithme d'approximation de $\ln x$ pour $x > 1$.

Partie A : Inégalités préliminaires

On définit deux fonctions T et S sur $[1,+\infty[$ par : $T(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ et $S(x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$.

1) Démontrer que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad T(x) \le 2T(\sqrt{x})$ et $2S(\sqrt{x}) \le S(x)$.
2) Etudier sur $[1,+\infty[$ les variations des fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln x - T(x)$ et $g(x) = S(x) - \ln x$.
3) En déduire que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad T(x) \le \ln x \le S(x)$.

Partie B : Algorithme d'approximation du logarithme

Dans cette partie, x désigne un réel strictement supérieur à 1.

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
   a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \ge 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_{n+1} - 1 \le \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_n - 1 \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (x-1)$.
   c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = x^{1/2^n}$.
2) On définit les deux suites (T_n) et (S_n) par : $T_n = 2^n T(u_n)$ et $S_n = 2^n S(u_n)$, où T et S sont les fonctions introduites dans la partie **A**.
   a) Comparer T_{n+1} et T_n, puis S_{n+1} et S_n.
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n \le \ln x \le S_n$.
   c) En déduire la convergence des suites (T_n) et (S_n).
   d) Déterminer un équivalent de $u_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire les limites de T_n et S_n quand n tend vers $+\infty$.
3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n = \dfrac{S_n}{T_n}$. Démontrer les égalités suivantes :

   (1) $C_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+C_n}{2}}$ (2) $S_{n+1} = \dfrac{S_n}{C_{n+1}}$ (3) $T_{n+1} = \dfrac{S_{n+1}}{C_{n+1}}$
4) En utilisant les relations précédentes, écrire un programme en Turbo-Pascal demandant à l'utilisateur un réel $x > 1$ et un entier naturel p, et faisant afficher le plus petit entier n tel que $S_n - T_n < 10^{-p}$ et la valeur de S_n correspondante (qui sera donc une valeur approchée par excès de $\ln x$ à 10^{-p} près).

Partie C : Vitesse de convergence

1) Dans cette question, f et g sont les fonctions introduites en **A-2)**.
   a) Démontrer que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \le g'(x) \le \dfrac{(x-1)^2}{2}$.
   b) En déduire que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \le g(x) \le \dfrac{(x-1)^3}{6}$.
   c) En raisonnant de même, démontrer que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \le f(x) \le \dfrac{(x-1)^3}{3}$.
2) Dans cette question, x est un réel strictement supérieur à 1. Et (u_n), (T_n) et (S_n) sont les suites introduites dans la partie **B**.
   a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n - \ln x = 2^n g(u_n)$ et $\ln x - T_n = 2^n f(u_n)$.

b) En déduire deux réels α et β tels que, pour tout entier naturel n :

$$0 \le S_n - \ln x \le \alpha \frac{(x-1)^3}{4^n} \qquad 0 \le \ln x - T_n \le \beta \frac{(x-1)^3}{4^n}$$

c) Prouver enfin que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le S_n - T_n \le \frac{1}{2} \times \frac{(x-1)^3}{4^n}$.

Exercice 21 (d'après ESSEC 1989 voie S)

Le problème a pour objet l'étude d'un procédé d'approximation de la fonction exponentielle par des fractions rationnelles.

Partie A : Etude d'une suite de fonctions

Pour tout entier naturel n, on note E_n l'ensemble des fonctions numériques f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0.$$

1) Montrer que la fonction f_0 définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = e^{x/2}$ appartient à l'ensemble E_0.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n une fonction appartenant à E_n. On définit la fonction f_{n+1} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{n+1}(x) = 2[(2n+1)f_n(x) - xf'_n(x)].$$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_{n+1}(x) = -\frac{x}{2} f_n(x)$.

b) Montrer que la fonction f_{n+1} appartient à l'ensemble E_{n+1}.

3) On définit donc une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in E_n$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = e^{x/2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1}(x) = 2[(2n+1)f_n(x) - xf'_n(x)]$.

a) Expliciter les fonctions f_1 et f_2.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_{n+2}(x) = 2(2n+3)f_{n+1}(x) + x^2 f_n(x)$.

c) En déduire la fonction f_3.

Partie B : Etude d'une suite de polynômes

Pour tout entier naturel n, on pose : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = f_n(x)e^{-x/2}$.

1) Expliciter les fonctions P_0, P_1, P_2 et P_3.

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_{n+2}(x) = 2(2n+3)P_{n+1}(x) + x^2 P_n(x)$.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction P_n est un polynôme à coefficients entiers.

4) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

5) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $\forall x \in]-\infty, 2[\quad P_n(x) > 0$.

6) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$.

7) Ecrire un programme en Turbo-Pascal demandant à l'utilisateur un entier n et un réel x, puis affichant la valeur de $P_n(x)$.

Partie C : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n(x) = (-1)^n [f_n(x) - f_n(-x)]$.

1) Montrer que la fonction g_n est impaire.

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'_{n+1}(x) = \frac{x}{2} g_n(x)$.

3) En déduire par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \le g_n(x) \le \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} e^{x/2}$.

Partie D : Etude d'une suite de rationnels

Dans la suite du problème, on pose $u_n(x) = \dfrac{P_n(-x)}{P_n(x)}$ pour tout entier naturel n et pour tout réel x qui n'est pas racine du polynôme P_n.

D'après **B-5)**, $u_n(x)$ est au moins définie pour $x < 2$. La question 4) étudiera l'existence de la suite pour $x \geq 2$ avant d'étudier sa convergence.

1) Si x n'est pas racine de P_n, montrer que : $u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1} \dfrac{g_n(x)e^{x/2}}{P_n(x)}$.

2) **Etude de la convergence de la suite si $x \leq 0$.**
   a) A l'aide du **B-2)**, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $\forall x \in \mathbb{R}^- \quad P_n(x) \geq P_n(0)$.
   b) Déduire des résultats précédents que : $\forall x \in]-\infty, 0] \quad \left| u_n(x) - e^x \right| \leq \dfrac{1}{(2n)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}$.
   c) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n(x)$ pour $x \leq 0$.

3) **Etude de la convergence de la suite si $0 < x < 2$.**
   a) Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $0 < x < 2$.
   b) En déduire la limite de la suite de terme général $u_n(x)$ pour $0 < x < 2$.

4) **Etude de la convergence de la suite si $x \geq 2$.**
   a) Démontrer que si n est pair : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) > 0$. On le démontrera d'abord pour $x \leq 0$, puis, en utilisant la fonction g_n, pour $x > 0$. En déduire que l'équation $P_n(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ si n est pair.
   b) On suppose que n est impair : $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.
      (1) A l'aide du **A-2)a)**, étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}$.
      (2) En déduire que l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution a_p sur $\mathbb{R}$.
      (3) En déduire le signe de $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c) On suppose que n est pair : $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes les variations de f_n sur $\mathbb{R}$.
   d) On revient au cas où $n = 2p+1$ pour étudier la suite (a_p).
      (1) Montrer en utilisant **A-3)b)** et le signe de $f_{2p+3}(a_p)$, que la suite (a_p) est strictement croissante.
      (2) On suppose que la suite (a_p) converge et on pose $\ell = \lim\limits_{p \to +\infty} a_p$. Déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} u_{2p+1}(-\ell)$, puis $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{f_{2p+1}(\ell)}{f_{2p+1}(-\ell)}$. Montrer que ce résultat est absurde et en déduire que la suite (a_p) diverge et tend vers $+\infty$.
      (3) En déduire que pour tout $x \geq 2$, il existe un entier p_x tel que, pour tout $n \geq 2p_x$, $u_n(x)$ existe et soit strictement positif.
   e) Pour $x \geq 2$ et $n \geq 2p_x$, exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ et en déduire la limite de la suite de terme général $u_n(x)$ pour $x \geq 2$.

Dans la suite du problème, on se placera dans le cas où $u_n(x)$ existe, c'est-à-dire pour $n \geq 2p_x$ si $x \geq 2$.

Partie E : Vitesse de convergence de la suite

1) **Recherche d'un équivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.**

   a) On suppose que $n \geq 1$. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^- \quad f_n(0) - \frac{x^2}{4} f_{n-1}(0) \leq f_n(x) \leq f_n(0).$$

   b) En déduire que, pour tout x fixé, $P_n(x)$ équivaut à $P_n(0)e^{-x/2}$ lorsque n tend vers l'infini. On commencera par le démontrer pour $x \leq 0$, puis pour $x > 0$ en utilisant la suite de terme général $u_n(x)$.

2) **Majoration de $\left| u_n(x) - e^x \right|$.**

   a) Déduire du **D-1)** que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| u_n(x) - e^x \right| \leq \left| u_{n+1}(x) - u_n(x) \right|$.

   b) Déduire du **B-2)** que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_{n+1}(-x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(-x) = 2(-1)^n x^{2n+1}$

   c) En déduire enfin que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| u_n(x) - e^x \right| \leq \dfrac{2|x|^{2n+1}}{P_n(x)P_{n+1}(x)}$.

3) **Recherche d'un équivalent de $u_n(x) - e^x$.**

   On suppose x réel non nul fixé.

   a) Déterminer un équivalent de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

   b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x) - u_n(x)} = 0$.

   c) En <u>admettant</u> la formule de Stirling : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}} = 1$, montrer que

   $u_n(x) - e^x$ équivaut à $(-1)^{n+1} e^{x-1} \left(\dfrac{ex}{4n}\right)^{2n+1}$ quand n tend vers l'infini.