Les incontournables :

1. **Série de Fourier de la fonction "créneau".**

   Par exemple, $f(x)=1$ si $x\in[0,\pi]$, $f(x)=0$ si $x\in]\pi,2\pi[$ et f est $2\pi-$périodique.
   f est continue par morceaux et $2\pi-$périodique donc admet une série de Fourier.
   De plus f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ de somme sa régularisée $\tilde{f}$ ($\tilde{f}(x)=f(x)$ si $x\notin\pi\mathbb{Z}$ et $\tilde{f}(x)=1/2$ si $x\in\pi\mathbb{Z}$) (thm de Jordan-Dirichlet) et f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ donc cette convergence n'est pas normale.
   Soit $g=f-1/2$. La régularisée $\tilde{g}$ de g est une fonction impaire qui a la même série de Fourier que g, d'où $a_0(f)=1/2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n(f)=0$ et $b_n(f)=b_n(\tilde{g})=\dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t$.
   $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin(nt)\ \mathrm{d}t=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\tilde{f}(x)$.

2. **Série de Fourier de la fonction f :$t\mapsto\exp(-iat)$ sur $[0,2\pi[$, avec f $2\pi-$périodique et $a\notin\mathbb{Z}$.**

   f est continue par morceaux et $2\pi-$périodique donc admet une série de Fourier.
   De plus f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ de somme sa régularisée $\tilde{f}$ ($\tilde{f}(x)=f(x)$ si $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\tilde{f}(x)=e^{-ia\pi}\cos a\pi$ si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$) (thm de Jordan-Dirichlet) et f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ donc cette convergence n'est pas normale.
   $\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\exp(-int)\ \mathrm{d}t=\frac{e^{-ia\pi}\sin a\pi}{\pi(n+a)}$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{e^{-ia\pi}\sin a\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\exp(int)}{n+a}=\tilde{f}(t)$.

3. **Soit $a>0$, fixé, déterminer le développement en série de Fourier de $f(t)=\dfrac{1}{\cos t+\operatorname{ch} a}$ (pour calculer $a_n(f)$, poser $z=e^{it}$).** *Mines* d4-16

   f est continue par morceaux et $2\pi-$périodique donc admet une série de Fourier.
   De plus f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ de somme f.
   f est paire donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(f)=0$.
   $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{2}{z+z^{-1}+2\operatorname{ch} a}=\dfrac{2z}{(z+e^a)(z+e^{-a})}=\dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\dfrac{1}{1+e^{-a}z}-\dfrac{e^{-a}z^{-1}}{1+e^{-a}z^{-1}}\right)$ $(z\neq 0)$
   $|e^{-a}z|=|e^{-a}z^{-1}|<1$ donc $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-a}z)^n-(e^{-a}z^{-1})\sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-a}z^{-1})^n\right)$.
   $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-a}z)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(-e^{-a}z^{-1})^n\right)=\dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-e^{-a})^n(z^n+z^{-n})\right)$.
   $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^ne^{-na}\cos nt\right)$.
   Soit $u_0=\dfrac{1}{\operatorname{sh} a},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=t\mapsto\dfrac{2}{\operatorname{sh} a}(-1)^ne^{-na}\cos nt$ On vient de trouver un développement de f en somme de série trigonométrique normalement convergente ($\|u_n\|_\infty=\dfrac{2}{\operatorname{sh} a}(e^{-a})^n$ est le TG d'une série géométrique convergente) donc il s'agit bien de la série de Fourier.
   (Rappel : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(u_p(t)\cos nt)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(u_p(t)\cos nt)\ \mathrm{d}t$ (par convergence normale sur un segment) $=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(u_n(t)\cos nt)\ \mathrm{d}t$.)

4. **Déterminer toutes les fonctions f, $2\pi-$périodiques et de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :**

$$\int_0^{2\pi}f=0\quad\text{et}\quad\forall t\in\mathbb{R}\quad|f''(t)|\leq|f(t)|$$

D4-45

   Condition nécessaire : Soit f vérifiant les conditions données.
   f est $\mathcal{C}^2$ et $2\pi-$périodique donc f et f'' admettent des coefficients de Fourier et $\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f'')=(in)^2c_n(f)$.

$\int_0^{2\pi} f = 0$ donc $c_0(f) = 0$.
f et $f"$ sont continues par morceaux et $2\pi-$périodiques donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f"|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f")|^2$ d'où l'inégalité : $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} (1-n^2)|c_n(f)|^2 \geq 0$.
Tous les termes sont dans $\mathbb{R}_-$ donc tous sont nuls : $\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\},\ c_n(f) = 0$.
f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier converge (normalement) sur $\mathbb{R}$ de somme f et donc $f = t \mapsto c_{-1}e^{-ix} + c_1 e^{ix}$ ou $f = t \mapsto A\cos t + B\sin t,\ (A,B)\in\mathbb{C}^2$.
Condition suffisante : Si $f = t \mapsto A\cos t + B\sin t,\ (A,B)\in\mathbb{C}^2$, alors elle est bien solution du problème.

5. **Déterminer toutes les solutions $2\pi-$périodiques de l'équation différentielle $y" + ye^{it} = 0$. Même question pour $y" + 4y = \sin t$ puis $y" + 4y = |\sin t|$.** d4-039

   – Soit $(E_1) : y" + ye^{it} = 0$.
   Si f une solution $2\pi-$périodique de (E_1),alors $f"$ existe et $f" = -fe^{it}$ donc $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $t \mapsto f"(t) + f(t)e^{it}$ est continue et $2\pi-$périodique donc par injectivité de $y \mapsto (c_n(y))_{n\in\mathbb{Z}}$, on a :
   $(1) : (f$ est solution $2\pi-$périodique de $(E_1)) \iff (\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f" + fe^{it}) = 0)$.
   $(1) \iff \forall n \in \mathbb{Z},\ -n^2 c_n(f) + c_{n-1}(f) = 0$ d'où 2 relations de récurrence :
   $(1) \iff \forall n \geq 1,\ c_n(f) = \frac{c_{n-1}(f)}{n^2}$ et $\forall p \geq 0,\ c_{-p-1}(f) = p^2 c_{-p}(f)$.
   $(1) \iff \forall n \geq 1,\ c_n(f) = \frac{c_0(f)}{(n!)^2}$ et $\forall p \geq 0,\ c_{-p-1}(f) = 0$.
   Si f une solution $2\pi-$périodique de (E_1),alors f est somme de sa série de Fourier (thm de CV normale) donc $(1) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = c_0(f)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{(n!)^2}$ ie une droite de l'espace (de dimension 2) des solutions.
   – De même pour $(E_2) : y" + 4y = \sin t$:
   $(2) \iff \forall n \in \mathbb{Z},\ (-n^2+4)c_n(f) = c_n(\sin)$.
   $(2) \iff \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,1,2\},\ c_n(f) = 0,\ 3c_1(f) = \frac{1}{2i},\ 3c_{-1}(f) = -\frac{1}{2i}$.
   $(2) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{3}\sin t + c_{-2}(f)e^{-2it} + c_2(f)e^{2it}$ ie la solution générale.
   – Pour $(E_3) : y" + 4y = |\sin t|$:
   $(3) \iff \forall n \in \mathbb{Z},\ (-n^2+4)c_n(f) = c_n(|\sin|)$.
   $(3) \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ c_{2k+1}(f) = 0,\ 4c_0(f) = \frac{2}{\pi},\ \forall k \in \mathbb{Z}^*,\ (-4k^2+4)c_{2k}(f) = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}$.
   Pour $k = 1$, cette dernière condition est impossible, donc (E_3) n'a pas de solution $2\pi-$périodique.

Pour aller plus loin :

6. *Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Prouver que, si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ admet a et b pour périodes avec $a/b \notin \mathbb{Q}$, alors f est constante.*
   On pourra calculer de deux manières $\int_0^a f(t)\exp(-\frac{2in\pi}{a}t)\ dt$

   [On pense à f comme fonction $a-$périodique :
   $\forall n \in \mathbb{Z},\ \int_0^a f(t)\exp(-\frac{2in\pi}{a}t)\ dt = ac_n(f) = \int_b^{a+b} f(u+b)\exp(-\frac{2in\pi}{a}(u+b))\ du\ (t = u+b)$ *donc*
   $\forall n \in \mathbb{Z},\ ac_n(f) = \exp(-\frac{2in\pi}{a}b)\int_b^{a+b} f(u)\exp(-\frac{2in\pi}{a}u)\ du = \exp(-\frac{2in\pi}{a}b)ac_n(f)$.
   $\forall n \in \mathbb{Z},\ \left(1 - \exp -\frac{2inb\pi}{a}\right)c_n(f) = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \frac{nb}{a} \notin \mathbb{Z}$ *donc* $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ c_n(f) = 0$.
   Soit $g = f - c_0(f)$. g est continue et $a-$périodique de coefficients de Fourier tous nuls, donc $g = 0$]

7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $2\pi-$périodique et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.*
   Calculer les coefficients de Fourier de la fonction dérivée f' en fonction de ceux de f.
   Montrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$. Etudier le cas d'égalité.
   En déduire l'inégalité isopérimétrique : Si L est la longueur d'un arc simple fermé Γ de classe $\mathcal{C}^1$ et A l'aire du domaine borné de contour Γ, alors $A \leq \dfrac{L^2}{4\pi}$. D4-42

   [$\displaystyle\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|^2}{n^2} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 = \int_0^{2\pi} |f|^2$ *et il y a égalité ssi* $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \dfrac{|c_n(f')|^2}{n^2} = |c_n(f')|^2$ *ie* $f = t \mapsto c_{-1}e^{-it} + c_1 e^{it}$.
   Soit $z : s \in [0, L] \to z(s) \in \mathbb{C}$ un paramétrage normal de l'arc, l'origine étant choisie de telle sorte que $\displaystyle\int_0^L z = 0$.
   $\displaystyle f := t \mapsto z\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)$ est $2\pi-$périodique et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f|^2 = \frac{2\pi}{L}\int_0^L |z|^2 \leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{L}{2\pi} z'\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\right|^2 dt = \frac{L}{2\pi}\int_0^L |z'|^2$
   donc (1) : $\displaystyle\int_0^L |z|^2 \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^L |z'|^2 = \frac{L^3}{4\pi^2}$ *puisque le paramétrage est normal.*
   $\displaystyle A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^L |z|^2(s)\frac{d\theta}{ds}\,ds$ *et* $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \geq \rho = |z|$ *donc* (2) : $\displaystyle A \leq \frac{1}{2}\int_0^L |z(s)|\,ds$.
   (3) : $\displaystyle\int_0^L |z(s)|\,ds = \int_0^L |z|.1 \leq \left(\int_0^L |z|^2.L\right)^{1/2} = \frac{L^2}{2\pi}$ *(inégalité de C.S.) d'où* $A \leq \dfrac{L^2}{4\pi}$.
   C'est une égalité ssi (1), (2) *et* (3) *sont des égalités ie ssi* $z(s) = c_{-1}e^{-is} + c_1 e^{is},\ \rho' = 0$ *et* $|z| =$*cste :* Γ *est un cercle.]*

8. *On appelle "produit de convolution" de deux fonctions f et g continues par morceaux et $2\pi-$périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ la fonction notée $f \star g$ définie par :*

$$\forall t \in R \quad (f \star g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)g(t-u)du$$

   (a) *Démontrer que $f \star g$ est $2\pi-$périodique ; que peut-on dire de la parité de $f \star g$ si f et g sont de même parité ? (resp. de parités opposées ?)*
   (b) *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$*
   En déduire l'expression des coefficients trigonométriques de $f \star g$ en fonction de ceux de f et g. D4-41

Pour s'entraîner :

9. Soit la fonction F $2\pi-$périodique définie par :

$$t \in [-\pi, 0] \mapsto \cos(t + \pi/4)$$
$$t \in [0, +\pi] \mapsto \sin(t + \pi/4)$$

   Etudier sa série de Fourier ; en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2 - 1}$. D4-24

   $\displaystyle[F(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-4k^2}\cos 2kt$ puis $t = \pi/4$.]

10. Déterminer (b, c, d) tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_0^{\pi} (bt^2 + ct + d)\cos nt \ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} (bt^2 + ct + d)\ \mathrm{d}t = 0$.
    Calculer les sommes des séries $\displaystyle\sum \frac{\cos nt}{n^2}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$. d4-28

    [$b = \dfrac{1}{2\pi},\ c = -1,\ d = \dfrac{\pi}{3}$.]

11. Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et $2\pi-$périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x-\pi)+\sin x$. d4-029

    [$\dfrac{-\cos x + \sin x}{2}$]

12. Soit $\lambda > 0$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ p réels distincts tels que $\max\limits_{k\in [\![1,p]\!]} |\lambda_k| \leq \lambda$.

    Soit $(a_1, ...a_p) \in \mathbb{C}^p$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k e^{i\lambda_k t}$. Montrer que $\|P'\|_\infty \leq \lambda \|P\|_\infty$.

    Pour cela, on utilisera pour $t = \lambda_k$ le développement de Fourier de la fonction ϕ impaire et $4\lambda-$périodique définie par $\phi(t) = t$ pour $t \in [0, \lambda]$, $\phi(t) = 2\lambda - t$ pour $t \in [\lambda, 2\lambda]$. D4-48

    [$P'(t) = \sum\limits_{k=0}^{p} ia_k\lambda_k e^{i\lambda_k t}$ où $\lambda_k = \dfrac{8\lambda}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)\dfrac{\pi\lambda_k}{2\lambda}$ donc $|P'(t)| \leq \dfrac{16\lambda\|P\|_\infty}{2\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.]

13. Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\exp(it)) \in \mathbb{C}$; calculer ses coefficients de Fourier ; étudier sa série de Fourier.

    Prouver que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos t}\, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$. d4-50

    [$c_n = \dfrac{1}{n!}$ si $n \geq 0,\ c_n = 0$ sinon.]

14. Soit $f = \left(x \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{1+(n+x)^2}\right)$. Prouver que $\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x)$. *Centrale* d4-053

    [f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (thm de transfert avec CV normale locale de $\sum u_n$ et $\sum u_n'$), $1-$périodique et paire.]

15. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $2\pi-$périodique. Démontrer que :

    $$(\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leq MA^n) \Rightarrow (\forall k \quad |k| > A \Rightarrow c_k(f) = 0)$$

    En déduire une CNS pour que f soit un polynôme trigonométrique. D4-47

    [$\forall n,\ |c_k(f^{(n)})| = k^n|c_k(f)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty$ d'où $\forall n,\ |c_k(f)| \leq M\left(\dfrac{A}{k}\right)^n$.

    Si $f(x) = \sum\limits_{k=-n_0}^{n_0} c_k e^{ikx}$, alors $|f^{(n)}(x)| \leq \sum\limits_{k=-n_0}^{n_0} \|\hat{f}\|_\infty |k|^n \leq (2n_0+1)\|\hat{f}\|_\infty n_0^n$.]