Les incontournables :

1. **Soit une suite (P_n) de fonctions polynômes à coefficients réels qui approche uniformément sur $\mathbb{R}$ une fonction f. Montrer que f est une fonction polynôme.** C9-047

On sait que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \|P_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_{n_0}\|_\infty \leq 2$.
Tout polynôme borné est constant donc $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \exists K_n \in \mathbb{R},\ P_n = P_{n_0} + K_n$.
Pour un $t = t_0$ particulier, la suite $(P_n(t_0))$ a une limite (qui est $f(t_0)$)) donc la suite numérique $(K_n)_{n \geq n_0}$ a une limite K et $\forall t \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} (P_{n_0}(t) + K_n) = f(t) = P_{n_0}(t) + K$, ce qui prouve que f est une fonction polynôme.

2. **En utilisant une suite de terme général f_n, affine par morceaux, continue sur $[0,1]$ telle que $f_n(t) = 0$ si $1/n \leq t \leq 1$, prouver que $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.**

Soit $f_n(t) = 0$ si $1/n \leq t \leq 1$, $f_n(t) = 1 - nt$ si $0 \leq t \leq 1/n$. f_n est continue sur $[0,1]$ et $\forall n,\ \|f_n\|_\infty = 1,\ \|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$.
La suite $\left(\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2}\right)$ n'est pas bornée donc $[\exists C,\ \forall f \in \mathcal{C}([0,1]),\ \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2]$ est faux : les deux normes ne sont pas équivalentes.

3. **Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et que f et f'' soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.**

Montrer que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2\right)^2 \leq \int_0^{+\infty} f^2 \int_0^{+\infty} f''^2$ c3-072

Soit $x > 0$. $(f', f) \in (\mathcal{C}^1([0,x]))^2$ donc par IPP, $\displaystyle\int_0^x f'\,f' = [ff']_0^x - \int_0^x f\,f''$.

$(f, f'') \in (L^2(\mathbb{R}_+))^2$ donc $ff'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$: en particulier $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f\,f''$ existe dans $\mathbb{R}$.

$f(0)f'(0) = 0$ et $f(x)f'(x) = \dfrac{1}{2}g'(x)$ où $g = f^2$. On a donc $\dfrac{1}{2}g'(x) = \displaystyle\int_0^x f'\,f' + \int_0^x f\,f''$.

Supposons que f'^2 ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction AVP donc $\displaystyle\lim_{+\infty} \int_0^x f'\,f' = +\infty$ d'où $\lim\limits_{+\infty} g'(x) = +\infty$.
Alors, $\forall \alpha > 0,\ \exists x_0,\ \forall x \geq x_0,\ g'(x) \geq \alpha$ donc $\exists x_0,\ \forall x \geq x_0,\ g(x) \geq g(x_0) + \alpha(x - x_0)$ et $g \notin L^1(\mathbb{R}_+)$, ce qui est absurde. f'^2 est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{+\infty} g'(x) = \beta$ existe dans $\mathbb{R}$.
Si $\beta > 0$, la minoration précédente de g est encore vraie pour tout $\alpha < \beta$ donc $\beta > 0$ est absurde.
De même, si $\beta < 0$, pour $\alpha = \beta/2 (< 0)$ par exemple, $\exists x_0,\ \forall x \geq x_0,\ g(x) \leq g(x_0) + \alpha(x - x_0)$ donc $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ ce qui est absurde (g est AVP).

On en déduit que $\beta = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'\,f' = -\int_0^{+\infty} f\,f''$. De plus, d'après l'inégalité de C.S., f et f'' étant $L^2(\mathbb{R}_+)$: $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f\,f''\right)^2 \leq \int_0^{+\infty} f^2 \int_0^{+\infty} f''^2$

Pour aller plus loin :

4. *Dans $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 \overline{f}g$, prouver que l'orthogonal du sous-espace des fonctions polynômiales est le sous-espace nul.*

[Soit (P_n) une suite de polynômes de limite $f \in E$ pour $\|.\|_\infty$ (thm de Weierstrass) ; si $f \in \mathbb{R}[X]^\perp$, alors $\|f\|_2 = \langle f, f - P_n + P_n\rangle = \langle f, f - P_n\rangle \to 0$.]

5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $r_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{2i\pi\alpha} z \end{array}$. Soit φ une application continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*

   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ r_\alpha^k(z) \right) = \int_0^1 \varphi\left(e^{i2\pi t} z\right) dt$. O16-X02

   [Pour $\varphi = u \mapsto u^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), il s'agit de prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{z^p}{n} \frac{1-e^{2ip\pi\alpha n}}{1-e^{2ip\pi\alpha}} = 0$ ($p\alpha \notin \mathbb{Z}$ et $(1-e^{2ip\pi\alpha n})_n$ est une suite bornée) ; et on conclut par thm de Weierstrass]

6. *Lemme de Lebesgue :*

   Soit $f \in Cm([0,1], \mathbb{C})$ et a une suite réelle telle que $\lim a_n = +\infty$. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t) \sin(a_n t)\, dt = 0$.

   [On le prouve d'abord pour les fonctions en escalier.]

Pour s'entraîner :

7. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(k)| \end{array}$ est une norme, et qu'elle n'est pas équivalente à $N(P) = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

   Montrer que $\psi : P \mapsto |P(0)| + N(P')$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$; montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists A_n \in \mathbb{R},\ N(P') \leq A_n \Phi(P)$. *CCP* c3-013

   [$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{\Phi(X^n)}{N(X^n)} \geq n!$; $\forall k \leq n,\ P^k(k) = a_n \dfrac{n!}{(n-k)!} k^{n-k} + ... + a_k k!$ d'où par récurrence $\exists M_{n,k},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ k|a_k| \leq M_{n,k}\Phi(P)$.]

8. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ telle que f soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et f' de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Montrer que $\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^{1/2}$ puis que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$ et que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. c3-074

   [$|f(y) - f(x)| = |\displaystyle\int_x^y 1.f'|$ et inégalité de C.S. ; si $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$ est faux, alors $\exists (a,b,c,(x_n)),\ \forall n,\ |f(x_n)| \geq a$ et $\displaystyle\int_{x_n}^{x_n+b} |f| \geq c$ où a, b, c sont des constantes de $\mathbb{R}_+^*$ et f n'est pas $L^1(\mathbb{R}_+)$.]

9. f décrit l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur le segment $[a\ b]$ ($a < b$).
   Déterminer le minimum du produit $P_f = \left(\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(x)}\, dx \right)$; pour quelles fonctions f ce minimum est-il atteint ?
   Montrer que P_f n'est pas majoré. C6-048

   [C.S. pour $(\sqrt{f}, 1/\sqrt{f})$; égalité à $(b-a)^2$ ssi f est constante ; $c = (a+b)/2,\ f_n(t) = n$ si $t \in [a, c-1/n],\ 1/n$ si $t \in [c+1/n, b]$, et affine par morceaux continue donne (P_{f_n}) non majorée.]

10. (a) Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convergente pour $\|.\|_\infty^{\mathbb{R}}$ vers une fonction f.
    On note $g_n = f_n \circ f_n$ et $g = f \circ f$. Démontrer que la suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g.

    (b) Soit $f_n(x) = x^2 + 1/n^2$. Démontrer que (f_n) vérifie les hypothèses de la question (a) et déterminer les fonctions $f,\ g_n,\ g$. La suite (g_n) est-elle convergente vers g pour $\|.\|_\infty^{\mathbb{R}}$? C9-044bis

    [(a) $g_n(t) - g(t) = (f_n \circ f_n(t) - f \circ f_n(t)) + (f \circ f_n(t) - f \circ f(t))$; (b) $g_n - g$ n'est pas bornée.]