**Les incontournables :**

1. **Etudier suivant $\alpha$ l'existence de l'intégrale $I_\alpha = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha \, \mathrm{d}x$. Calculer $I_{1/2}$.** c8-052

$f : x \mapsto (\tan x)^\alpha$ est $CM(]0,\pi/2[)$ (au moins) et AVP (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).
$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ donc $f \in L^1(]0,c]) \iff -\alpha < 1$.
$f(x) = \dfrac{1}{(\tan(\pi/2-x))^\alpha} \underset{x\to\pi/2}{\sim} \dfrac{1}{(\pi/2-x)^\alpha}$ donc $f \in L^1([c,\pi/2[) \iff \alpha < 1$.
Conclusion : $I_\alpha$ existe ssi $-1 < \alpha < 1$.
$t = \sqrt{\tan x} \mapsto x = \arctan t^2$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,\pi/2[$ donc $I_{1/2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t \frac{2t}{1+t^4} \, \mathrm{d}t$.

$$I_{1/2} = \int_0^{+\infty} \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1/2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1/2} \right) \mathrm{d}t.$$

$$I_{1/2} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(2t+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(2t-\sqrt{2}) \right]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

2. **Soit $f_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta}$. Etudier l'intégrabilité de $f_{\alpha,\beta}$ sur $]0,+\infty[$ ; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{2,1/2}$.** C8-056

$f_{\alpha,\beta}$ est $CM(]0,+\infty[)$ (au moins) et AVP.
Cas 1 : $\alpha \neq \beta$ ; on peut supposer $\alpha < \beta$.
$f_{\alpha,\beta}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^\alpha}$ donc $f \in L^1(]0,c]) \iff \alpha < 1$ et $f_{\alpha,\beta}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta}$ donc $f \in L^1([c,+\infty[) \iff \beta > 1$.
Conclusion : $f_{\alpha,\beta} \in L^1(]0,+\infty[)$ ssi $\alpha < 1 < \beta$.
Cas 2 : $\alpha = \beta$. $x \mapsto \dfrac{1}{2x^\alpha}$ n'est jamais intégrable sur $(]0,+\infty[$.
$t = \sqrt{x} \mapsto x = t^2$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{t+t^4} \, \mathrm{d}t$.

$$I = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t} - 1/2 \frac{2t-1}{t^2-t+1} + 3/2 \frac{1}{(t-1/2)^2+3/4} \right) \mathrm{d}t = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

3. **Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\left(\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t\right)$ et calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.**

$f = t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est $CM(]0,+\infty[)$ et AVP.
$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc $f \in L^1(]0,c]) \iff 1-x < 1$ et $f(t) = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^{x+1}} t^{x-1}\right) = o_{t\to+\infty}(\dfrac{1}{t^2})$
donc $f \in L^1([c,+\infty[)$ pour tout $x$.
Conclusion : $\Gamma(x)$ existe ssi $x > 0$.
Soit $n \geq 2$, $u = t \mapsto t^{n-1}$ et $v = t \mapsto -e^{-t}$.
$(u,v) \in (\mathcal{C}^1([a,b]))^2$ donc $\displaystyle\int_a^b f = [uv]_a^b + (n-1) \int_a^b e^{-t} t^{n-2} \, \mathrm{d}t$ pour $0 < a < b$.
$\lim\limits_0 uv = \lim\limits_{+\infty} uv = 0$ donc $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.
De plus $\Gamma(1) = 1$, donc $\forall n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

4. **Prouver que $\left(t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}\right)$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ existe. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$**

Soit $f = t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ et pour $n \geq 2$, $I_n = \displaystyle\int_\pi^{n\pi} |f|$.
$I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f|$ et $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f| = \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u+k\pi} \, \mathrm{d}u \geq \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{(k+1)\pi} \, \mathrm{d}u = \frac{2}{(k+1)\pi}$ donc
$I_n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$. On reconnait une somme partielle de SATP divergente donc $\lim I_n = +\infty$

et $f$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
$f$ admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$ noté $\tilde{f}$ ($\tilde{f}(0)=1$) donc $f \in L^1(]0,c])$.
$u=-\cos$ et $v=t\mapsto 1/t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[c,b]$ donc $\displaystyle\int_c^b f=[uv]_c^b-\int_c^b \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
$(uv)(b)=\dfrac{-\cos b}{b}$ a une limite (0) quand $b\to+\infty$ et $(t\mapsto \dfrac{\cos t}{t^2})\in L^1([c,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right|\leq \dfrac{1}{t^2}$
donc $\displaystyle\int_c^b \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ a une limite quand $b\to+\infty$.
On a donc prouvé l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
On reprend l'IPP ci-dessus en prenant maintenant $u=t\mapsto 1-\cos t=2\sin^2 t/2$.
$\displaystyle\int_a^b f=[uv]_a^b+\int_a^b 2\frac{\sin^2 t/2}{t^2}\,\mathrm{d}t=[uv]_a^b+\int_{a/2}^{b/2}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
$(uv)(a)=\dfrac{2\sin^2 a/2}{a}\underset{a\to0}{\sim} a/2\to_{a\to0}0$ donc $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

**5. Soit $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{x}}\sin(x)dx$ ; étudier la série $\sum u_n$. En déduire l'étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\sin(x)dx$** C8-090

La série est convergente par TSSA et également absolument convergente (cf Analyse(2)).
$f=x\mapsto e^{-\sqrt{x}}\sin x$ est $CM$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $f\in L^1(\mathbb{R}_+)\iff b\mapsto\displaystyle\int_0^b |f|$ a une limite en $+\infty$.
$\displaystyle\int_0^b|f|=\sum_{k=0}^{[b/\pi]}|u_k|+\int_{\pi[b/\pi]}^b|f|\to_{b\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|$ car $\displaystyle\int_{\pi[b/\pi]}^b|f|\leq\pi e^{-\sqrt{\pi[b/\pi]}}$ donc $f\in L^1(\mathbb{R}_+)$.
De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty}f=\lim_{b\to+\infty}\sum_{k=0}^{[b/\pi]}u_k+\int_{\pi[b/\pi]}^b f=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$. On peut en trouver une bonne valeur approchée d'après le TSSA.

**6. Soit $w_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que $w_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (On utilisera le changement de variable $u=\sin^n x$)** c9-054

On étudie $w'_n=\sqrt{n}w_n$.
$u=\sin^n x\mapsto x=\arcsin(u^{1/n})$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0,\pi/2[$ sur $]0,1[$ donc $w'_n=\displaystyle\int_0^1\sqrt{n}u\frac{1}{n}u^{1/n-1}\frac{1}{\sqrt{1-u^{2/n}}}\,\mathrm{d}u$.
Soit $f_n=u\mapsto\dfrac{u^{1/n}}{\sqrt{n(1-e^{(2\ln u)/n})}}$. $(f_n)$ est une suite de fonctions $CM$ sur $]0,1[$.
$(f_n)$ CVS (converge simplement) sur $]0,1[$ vers $L=u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{-2\ln u}}$ et $L\in CM(]0,1[)$.
Soit $\varphi=u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. $\varphi\in CM([0,1[)$ et $\varphi(u)\underset{u\to1}{\sim}\dfrac{1/\sqrt{2}}{(1-u)^{1/2}}$ donc $\varphi\in L^1([0,1[)$.
$t\mapsto\dfrac{1-e^t}{t}$ a pour dérivée $t\mapsto(1-t-e^{-t})e^tt^{-2}$ donc décroit sur $\mathbb{R}$.
$\forall(u,n)\in]0,1[\times\mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{2\ln u}(1-e^{(2\ln u)/n})\leq\dfrac{1}{2\ln u}(1-u^2)$ et $u^{1/n}\leq1$ donc $\forall(u,n)\in]0,1[\times\mathbb{N}^*$, $|f_n(u)|\leq\varphi(u)$ :
le "chapeau intégrable" $\varphi$ "domine la suite $(f_n)$ sur $]0,1[$".
D'après le thm de convergence dominée, $L\in L^1(]0,1[)$ et $\lim\displaystyle\int_0^1 f_n=\int_0^1 L$.
$x=\sqrt{-2\ln u}\mapsto u=e^{-x^2/2}$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0,1[$ donc $\displaystyle\int_0^1 L=\int_{+\infty}^0\frac{-xe^{-x^2/2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi/2}$.

**7. Limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(1+t^2/n)^{-n}\,\mathrm{d}t$.**

Soit $f_n=t\mapsto(1+t^2/n)^{-n}=\exp(-n\ln(1+t^2/n))$. $(f_n)$ est une suite de fonctions $CM$ sur $\mathbb{R}$.
$(f_n)$ CVS sur $\mathbb{R}$ vers $L=t\mapsto\exp(-t^2)$ et $L\in CM(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi = t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. $\varphi \in CM(\mathbb{R})$ et $\varphi(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.
$\forall (t,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*,\ (1+t^2/n)^n = 1 + t^2 + \displaystyle\sum_{2\le k\le n} a_k \geq 1+t^2$ (tous les $a_k$ sont dans $\mathbb{R}_+$) donc
$\forall (t,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ : le "chapeau intégrable" $\varphi$ "domine la suite $(f_n)$ sur $\mathbb{R}$".
D'après le thm de convergence dominée, $L \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} L = \sqrt{\pi}/2$.

**8. Prouver que la fonction $J_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $xy" + y' + xy = 0$.**

Soit $(\Pi_n)$ : "$J_0 \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $D^n(J_0) = x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin t)^n \cos(x\sin t + n\pi/2)\ \mathrm{d}t$".
Notons $f_n = (t,x) \mapsto (\sin t)^n \cos(x \sin t + n\pi/2),\ I = [0,\pi]$ et $J = \mathbb{R}$.
- Pour tout $t \in I,\ f_0(t,.)$ est $\mathcal{C}^0(J)$.
- Pour tout $x \in J,\ f_0(.,x)$ est $CM(I)$.
- $\varphi = 1 \in L^1(I)$ domine $f_0$ : $\forall (t,x) \in I\times J,\ |f_0(t,x)| \leq \varphi(t)$.

Conclusion : $J_0$ est continue sur $J$ ie $(\Pi_0)$.
Supposons $(\Pi_n)$ pour un $n \geq 0$.
- Pour tout $t \in I,\ f_n(t,.)$ est $\mathcal{C}^1(J)$ de dérivée $f_{n+1}(t,.)$.
- Pour tout $x \in J,\ f_{n+1}(.,x)$ est $CM(I)$.
- $\varphi = 1 \in L^1(I)$ domine $f_{n+1}$ : $\forall (t,x) \in I\times J,\ |f_{n+1}(t,x)| \leq \varphi(t)$.

Conclusion : $D^n(J_0)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $J$ et $D^{n+1}(J_0) = x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_{n+1}(t,x)\ \mathrm{d}t$ ie $(\Pi_{n+1})$.
Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ (\Pi_n)$ et en particulier $J_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
De plus, $J_0'(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} -\sin t \sin(x\sin t)\ \mathrm{d}t$ et $J"_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} -\sin^2 t \cos(x \sin t)\ \mathrm{d}t$.
Soit $A = \pi(xJ"_0(x) + J_0'(x) + xJ_0(x))$.
$A = \displaystyle\int_0^{\pi} (-\sin t)(\sin(x\sin t)) + (\cos t)(x\cos t\cos(x\sin t))\ \mathrm{d}t = [(\cos t)(\sin(x\sin t))]_0^{\pi} = 0$.

**9. Prouver que la fonction $(\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ dt)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\ln\Gamma$ est une fonction convexe.**

On va prouver en fait que $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ comme dans l'exo.8.
Soit $(\Pi_n)$ : "$\Gamma \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+^*)$ et $D^n(\Gamma) = x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$".
Notons $f_n = (t,x) \mapsto (\ln t)^n e^{-t}t^{x-1},\ I = ]0,+\infty[$ et $J = \mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t \in I,\ f_0(t,.)$ est $\mathcal{C}^0(J)$.
- Pour tout $x \in J,\ f_0(.,x)$ est $CM(I)$.
- Domination locale : Soit $[a,b] \subset J$ quelconque et $\varphi = t \mapsto e^{-t}t^{a-1}$.
  $\varphi \in L^1(I)$ (cf exo.3.) et $\forall (t,x) \in I\times[a,b],\ |f_0(t,x)| \leq \varphi(t)$.

Conclusion : $\Gamma$ est continue sur $J$ ie $(\Pi_0)$.
Supposons $(\Pi_n)$ pour un $n \geq 0$.
- Pour tout $t \in I,\ f_n(t,.)$ est $\mathcal{C}^1(J)$ de dérivée $f_{n+1}(t,.)$.
- Pour tout $x \in J,\ f_{n+1}(.,x)$ est $CM(I)$.
- Domination locale : Soit $[a,b] \subset J$ et $\varphi = t \mapsto (\ln t)^{n+1}e^{-t}t^{a-1}$.
  $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} (\ln t)^{n+1}t^{a-1} = o_{t\to 0}((1/t)^{a/2}t^{a-1}) = o_{t\to 0}(\dfrac{1}{t^{1-a/2}})$ donc $\varphi \in L^1(]0,c])$.
  $\varphi(t) = o_{t\to+\infty}(t\ (1/t)^{a+2}t^{a-1}) = o_{t\to+\infty}(\dfrac{1}{t^2})$ donc $\varphi \in L^1([c,+\infty[)$.
  De plus $\forall (t,x) \in I\times[a,b],\ |f_{n+1}(t,x)| \leq \varphi(t)$.

Conclusion : $D^n(\Gamma)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $J$ et $D^{n+1}(\Gamma) = x \mapsto \displaystyle\int_I f_{n+1}(t,x)\ \mathrm{d}t$ ie $(\Pi_{n+1})$.
Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ (\Pi_n)$ et en particulier $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(J)$.
De plus, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_I \ln t\, e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ et $\Gamma"(x) = \displaystyle\int_I (\ln t)^2 e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$.
$(\ln\Gamma)" = \dfrac{1}{\Gamma^2}(\Gamma"\Gamma - \Gamma'^2)$ et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_I fg$ avec $f = t \mapsto \ln t\, e^{-t/2}t^{\frac{x-1}{2}}$ et $g = t \mapsto e^{-t/2}t^{\frac{x-1}{2}}$.

$f$ et $g$ sont de carrés intégrables (cf. les études des chapeaux) donc on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $\Gamma'^2(x) \leq \int_I f^2 \int_I g^2 = \Gamma(x)\Gamma"(x)$ et $\ln \Gamma$ est convexe.

**10. Soit $K(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{2i\pi xt}\, dt$ ; démontrer que $K$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ; déterminer sa dérivée. Calculer $K(x)$.**

Notons $f = (t,x) \mapsto e^{-t^2} e^{2i\pi xt}$, $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in I$, $f(t,.)$ est $\mathcal{C}^1(J)$ de dérivée $g(t,.)$ où $g = (t,x) \mapsto 2i\pi t e^{-t^2} e^{2i\pi xt}$.
- Pour tout $x \in J$, $f(.,x)$ et $g(.,x)$ sont $CM(I)$.
- Dominations globales : Soit $\varphi_0 = t \mapsto e^{-t^2}$ et $\varphi_1 = t \mapsto te^{-t^2}$.
  $\varphi_0(t) = o_{t\to\pm\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc $\varphi_0 \in L^1(I)$ ; de même $\varphi_1 \in L^1(I)$.
  $\forall (t,x) \in I \times [a,b],\ |f(t,x)| \leq \varphi_0(t)$ et $|g(t,x)| \leq \varphi_1(t)$.

Conclusion : $K \in \mathcal{C}^1(J)$ et $\forall x \in J,\ DK(x) = \int_I g$.

$DK(x) = -i\pi \int_I u'v$ en notant $u = t \mapsto e^{-t^2}$ et $v = t \mapsto e^{2i\pi xt}$.

$u, v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,b] \subset I$ donc $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - 2i\pi x \int_a^b e^{-t^2} e^{2i\pi xt}\, dt$. $\lim_{\pm\infty} uv = 0$ donc $DK(x) = -i\pi(-2i\pi x K(x))$ ie $K$ est solution de l'EDO $y' = -2\pi^2 xy$ donc $K(x) = \lambda e^{-\pi^2 x^2}$ où $\lambda$ ne dépend pas de $x$. $K(0) = \sqrt{\pi}$ donc $K(x) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}$.

---

*Pour aller plus loin :*

11. *Soit $f$ lipschitzienne et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.* C8-107

    [Si $f$ est lipschitzienne et $\lim_{+\infty} f = 0$, alors $\exists (K,\alpha),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \geq n,\ \int_{x_n}^{x_n+\alpha} |f| \geq K$.]

12. *Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + e^x \sin^2 x}$. Mines* c8-001

    [$\int_0^{k\pi} f = \sum_{h=0}^{k-1} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + e^{x+h\pi} \sin^2 x}$ a une limite quand $k \to +\infty$.]

13. *Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\tanh 3x - \tanh 2x}{x}\, dx$.* c8-045

    [Se ramener à $\int_{2b}^{3b} \frac{\tanh t}{t}\, \mathrm{d}t - \int_{2a}^{3a} \frac{\tanh t}{t}\, \mathrm{d}t$ puis $a \to 0$ et $b \to +\infty$.]

14. *On appelle 'produit de convolution' de deux fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, s'il existe, la fonction notée $f \star g$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R} \qquad (f \star g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$.*
    (a) *Démontrer que $\star$ est définie sur $CM(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que, si $f$ et $g$ sont continues sur $\mathbb{R}$, alors $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
    (b) *Démontrer que $\star$ est commutative, associative et distributive par rapport à $+$.*
    (c) *Soit $\theta$ un élément neutre de $\star$ s'il existe. Etudier la relation $\theta \star\ 1 = 1$ où $1$ désigne la fonction constante $x \mapsto 1$ ; que peut-on en déduire ?*
    (d) *Pour $f : x \mapsto |x-1|$ et $g : x \mapsto |x|$, représenter $f$, $g$ et $f \star g$.* C6-093

15. *Pour $x > 0$, on considère la suite de fonctions de terme général $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} 1_{]0,n[}(t)$.*
    *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} f_n = \Gamma(x)$ puis que $\Gamma(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$.* C9-51

    [Thm de CV dominée puis IPP successives de $\int_{\mathbb{R}_+} f_n$.]

16. *On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur un segment $[a\ b]$.*
    (a) *$(x,y) \mapsto K(x,y)$ étant une fonction continue sur $[a\ b]^2$, on considère l'application $P_K$ qui à toute fonction $f$ de $\mathcal{C}$ associe $P_K\ f$ définie par : $P_K\ f(x) = \displaystyle\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$.*
    *Démontrer que $P_K$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. On appellera $P_K$ 'opérateur intégral de noyau $K$'.*
    (b) *Démontrer que :*
    – *$P_{K_1} = P_{K_2} \Longrightarrow K_1 = K_2$. (On pourra utiliser des fonctions $f : y \mapsto (K_1 - K_2)(x_0, y)$)*
    – *$P_{K_1} \circ P_{K_2}$ est un opérateur intégral dont on précisera le noyau.*
    – *$Id$ n'est pas un opérateur intégral.*
    – *L'inverse d'un opérateur intégral, s'il existe, n'est pas un opérateur intégral.* C6-075
17. *Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n \sin nx = 0$.*
    *Prouver que $\lim v_n = 0$.* c9-056

    $[w_n = \min(1, |v_n|)$. Prouver d'abord par thm de CV dominée que $\lim \displaystyle\int_0^{\pi/2} w_n \sin^2 nt\ \mathrm{d}t = 0.]$

---

Pour s'entraîner :

18. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$. *CCP* c8-018

    $[\pi]$

19. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin^3 x\ \mathrm{d}x$. c8-038

    [9/25]

20. Intégrabilité de $x \mapsto \ln(\sin x)$ sur $]0, \pi/2]$ et calcul de l'intégrale. *CCP* C8-009

    $[I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\ \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\ \mathrm{d}x$. Prouver que $I, J$ existent et sont égales et étudier $I + J$.]

21. Soit $f_n = x \mapsto \dfrac{n!}{(x+1)...(x+n)}$ . Intégrabilité de $f_n$ sur $]0, +\infty[$ et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$. *CCP* C8-089

    $[\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\ln k}{(k-1)!(n-k)!}.]$

22. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$. *CCP* c8-032

    [0 (Relation de Chasles en 0 et $u = 1/t$).]

23. $a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t+t^2)^n}$ existe-t-elle ?
    Tracer $f(t) = \dfrac{1}{1+t+t^2}$ et donner son axe de symétrie.
    Montrer que $(\sum a_n)$ est divergente.
    Expliciter $a_n$ en fonction de $w_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}$. Donner une relation liant $w_n$ et $w_{n+1}$. *CCP* c8-030

    $[a_n \geq 1,\ a_n = (4/3)^n\sqrt{3}w_n$ et $2nw_{n+1} = (2n-1)w_n.]$

24. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(-E(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t$ *Centrale* c8-040

    $[1 - \gamma.]$

25. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^n}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(y)^{n-1}\ \mathrm{d}y$. *CCP* c8-023

    $[x = \mathrm{argch}\dfrac{1}{\cos y}]$

26. Soit $f$ une fonction continue de $[0\ 1]$ dans $E$ . Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 t^n\ f(t)\ dt = f(1)$. C6-006

 $[u = t^{n+1}$ puis thm de CV dominée.]

27. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x))^n\ dx$ ; déterminer une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$.
 En déduire que $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$. C6-080

 $[I_n = \dfrac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$.]

28. Démontrer que $\displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{e^{x^2}}{2x}$ C6-079

 [IPP puis $\displaystyle\int_0^x \dfrac{e^{t^2}-1}{2t^2}\ \mathrm{d}t = o(\dfrac{e^{x^2}}{2x})$ avec $t = xu$ dans l'intégrale.]

29. Au moyen d'une décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\ \mathrm{d}x$$

 avec $(m,n) \in \mathbb{N}^\star$ et $2n > 2m$. En déduire, en utilisant une suite de rationnels de limite $\alpha$, avec $\alpha \in ]0\ 1[$, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

 C8-091

30. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\ \mathrm{d}t$, pour $f$ continue bornée sur $\mathbb{R}_+$. Justifier rapidement l'existence de $I_n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$. *Mines* c9-023

 $[\lim I_n = 0,\ t = -\dfrac{\ln u}{n},\ \lim nI_n = f(0)$.]

31. Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{\left(\mathrm{ch}\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n}$. Démontrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n$. C9-045

 [CV dominée avec chapeau$=\dfrac{1}{1+x^2/2}$ car $\cosh^n \dfrac{x}{\sqrt{n}} = (1+2\sinh^2\dfrac{x}{2\sqrt{n}})^n \geq 1+2n\sinh^2\dfrac{x}{2\sqrt{n}}$.]

32. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)\ \mathrm{d}x$ où $a$ et $b$ sont deux réels $> 1$. c6-098

 [Chercher la dérivée de $F(t) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{t-\cos x}{a-\cos x}\right)\ \mathrm{d}x$. ]

33. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.
 Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$. Etudier $f(0)$, $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.
 Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x^2) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$. C6-072

34. Etudier $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^y)}$. *Centrale* c6-026

 [La dérivée partielle par rapport à $y$ est nulle (relation de Chasles en 1 et $t = 1/u$)]

35. Soit $x > 0$ et $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-tx}}{t}\ \mathrm{d}t$. Montrer que $I$ existe et est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $I(x)$. *CCP* c8-026

 $[I'(x) = 1/x$.]

36. Soit $g = \left(x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\ \mathrm{d}t\right)$. Prouver que $g$ est définie sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
Exprimer $g(x)$ au moyen des fonctions usuelles et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$. *Centrale* c8-046

[$g(x) = \arctan(1/x) + \frac{x}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1}$ ; $\pi/2$.]

37. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t$.
Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
Démontrer que $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$. On pourra étudier successivement les comportements de $\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t$ puis de $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\ \mathrm{d}t$. C8-105