Les incontournables :

1. **Prouver que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.**

Rem. : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans toute la feuille.
(0) : $\|.\|_\infty = x \in \mathbb{K}^n \mapsto \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$ est bien une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{R}$. (Tout partie finie non vide de $\mathbb{R}_+$ admet un maximum)
(1) (Inégalité triangulaire) : Soit $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. Notons $z = x+y$.
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|z_i| = |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ ce qui ne dépend plus de i, donc $\|z\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
(2) : Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$. Notons $z = \lambda x$.
Si $\lambda = 0$, alors $z = 0$ et $\|z\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty$. Supposons désormais $\lambda \neq 0$.
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|z_i| = |\lambda||x_i| \leq |\lambda|\|x\|_\infty$ ce qui ne dépend plus de i, donc $\|z\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty \leq |\lambda|\|x\|_\infty$.
En changeant λ en $1/\lambda$ et x en z, on aussi prouvé que $\|\dfrac{1}{\lambda}z\|_\infty \leq |\dfrac{1}{\lambda}|\|z\|_\infty$ ie $\|x\|_\infty \leq |\dfrac{1}{\lambda}|\|\lambda x\|_\infty$ d'où l'égalité.
(3) (Stricte positivité) : Soit $x \in \mathbb{K}^n$.
$\{|x_i| / i \in [\![1,n]\!] \} \subset \mathbb{R}_+$ donc $\|x\|_\infty \in \mathbb{R}_+$.
Supposons $\|x\|_\infty = 0$. Alors, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| \leq 0$ (0 est un majorant) donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| = 0$ ie $x = 0$.

2. **Prouver que $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.**

Soit $x \in \mathbb{K}^n$.
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(n(\|x\|_\infty)^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| = \sqrt{|x_i|^2} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$ ce qui ne dépend plus de i, donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

3. **Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Prouver que :**
   (a) **Toute boule ouverte de E est un ouvert de E.**
   (b) **Toute boule fermée de E est un fermé de E.**
   (c) **Toute boule fermée de E est un compact de E.**
   (d) **Tout sous-espace vectoriel de E est un fermé de E.**
   (e) **Le seul sous-espace vectoriel ouvert de E est E.**
   (f) **Le seul sous-espace vectoriel compact de E est $\{0_E\}$.**

N désignera la norme sur E.
(a) : Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ et $O = B(a,r)$.
Soit $x \in O$ et $\rho = r - N(x-a)$. Prouvons que $B(x,\rho) \subset O$:
$\forall y \in B(x,\rho),\ N(y-a) \leq N(y-x) + N(x-a) < \rho + N(x-a) = r$.

(b) : Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ et $F = \overline{B(a,r)}$.
Méthode directe : Prouvons que $E \setminus F$ est ouvert.
Soit $x \in E \setminus F$ et $\rho = N(x-a) - r$. Prouvons que $B(x,\rho) \subset E \setminus F$:
$\forall y \in B(x,\rho),\ N(y-a) = N(y-a) + N(x-y) - N(x-y) \geq N(x-a) - N(x-y) > N(x-a) - \rho = r$.
Méthode par critère séquentiel : Soit (x_n) une suite de $F^{\mathbb{N}}$ ayant une limite l dans E. Prouvons que $l \in F$.
$N(l-a) = \lim N(x_n - a)$ (continuité de N) et $\forall n \in \mathbb{N},\ N(x_n - a) \leq r$ donc $N(l-a) \leq r$ (passage à la limite dans $\leq$)

(c) : Toute boule fermée est un fermé (cf (2)) et est bornée donc c'est un compact car E est de dimension finie.

(d) : Soit F un sous-espace de E. Prouvons par critère séquentiel que F est fermé :
Soit (x_n) une suite de $F^{\mathbb{N}}$ ayant une limite l dans E.
F admet au moins un supplémentaire G. Soit π le projecteur sur G en direction de F. π est un endomorphisme de E qui est de dimension finie donc est continu et $\pi(l) = \lim(\pi(x_n))$, or

$\forall n \in \mathbb{N},\ \pi(x_n) = 0$ donc $\pi(l) = 0$ ie $l \in F$.
Ex. d'application : Si F un sous-espace de E et $a \in E \setminus \{0\}$, alors il existe $a' \in F$ tel que $N(a' - a) = \min\limits_{x \in F} N(x - a)$.
En effet $x \in F \mapsto N(x - a) \in \mathbb{R}$ est une fonction réelle minorée (par 0) donc elle admet une borne inférieure $m \leq N(0 - a) = N(a)$.
Soit $K = F \cap \overline{B(0, 3N(a))}$. K est fermé (intersection de fermés) et borné donc compact et $x \in K \mapsto N(x - a) \in \mathbb{R}$ est continue (N est continue) donc admet un minimum.
Ce minimum est m. En effet :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in F,\ m \leq N(x_\varepsilon - a) \leq m + \varepsilon$ (déf. d'une borne inférieure)
et $x \in F \setminus K \Rightarrow N(x - a) = N(x - a) + N(a) - N(a) \geq N(x) - N(a) \geq 2N(a) \geq m + N(a)$
donc $x_\varepsilon \in K$ dès que $\varepsilon < N(a)$.

(e) : Soit O un sous-espace ouvert de E. Prouvons que $O = E$.
$0_E \in O$ donc il existe $r > 0$ tel que $B(0_E, r) \subset O$. Soit $x \in E$. Si $x = O_E$, alors $x \in O$; sinon, $x = \lambda u$ où ($u = \dfrac{rx}{2N(x)}$,$\lambda = \dfrac{2N(x)}{r}$) et $N(u) = \dfrac{r}{2}$ donc $u \in B(0_E, r) \subset O$ et $\lambda u \in O$ (structure de sous-ev)

(f) : Il suffit de prouver que $\{0_E\}$ est le seul sous-espace borné de E. Prouvons que si $F \neq \{0_E\}$ alors F est non borné.
Soit $F \neq \{0_E\}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ quelconque. Il existe $a \in F$ tel que $a \neq 0_E$ donc $N(a) \neq 0_\mathbb{R}$. Alors $x = \dfrac{2A}{N(a)} a \in F$ et $N(x) > A$.

4. **Prouver que l'ensemble des matrices de rotation est un compact de $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.**

L'ensemble des matrices de rotation de $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ est $K = O_3^+(\mathbb{R})$.
Montrons que K est borné pour la norme $\|.\|_\infty$ de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (toutes les normes sont équivalentes) :
Soit $A \in K$. $\forall (i,j) \in (\,[\![1, n]\!]\,)^2,\ |a_{i,j}| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ donc $\|A\|_\infty \leq 1$.
Montrons que K est fermé :
Soit (A_p) une suite de $K^\mathbb{N}$ ayant une limite $L \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Prouvons que $L \in K$ ie que L est orthogonale et directe :
${}^tLL = \lim\limits_{p \to \infty} {}^tA_p A_p = \lim\limits_{p \to \infty} I_n = I_n$ (continuité de fonctions polynômiales) et $\det L = \lim\limits_{p \to \infty} \det A_p = 1$ (continuité de det).

5. **Soit $f(x,y) = \dfrac{y^2 + xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$, 1- si $\alpha = 1/2$? 2- si $\alpha = 1$?**

On étudie d'abord la fonction partielle à gauche $g_0 = x \mapsto f(x, 0)$.
$\forall x \neq 0,\ g_0(x) = 0$ donc g_0 admet pour tout α une limite $l = 0$ en 0. Une condition nécessaire pour que f soit prolongée par continuité en 0 est donc que $f(0,0) = 0$.
Soit f ainsi prolongée et $\alpha = 1/2$. Prouvons que f est continue :
f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, notons $\nu = \max(|x|, |y|)$ (ie on choisit la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$).
$\forall (x,y) \neq (0,0),\ |f(x,y) - f(0,0)| \leq \dfrac{2\nu^2}{\nu^{2\alpha}} = 2(\nu)^{2(1-\alpha)}$ et $\lim\limits_{\nu \to 0} 2(\nu)^{2(1-\alpha)} = 0$ donc f est continue en $(0,0)$.
Soit maintenant $\alpha = 1$. Prouvons que f n'est pas continue :
$(M_n) = (1/n, 1/n)$ est une suite de limite $(0,0)$ et $(f(M_n)) = (1)$ n'a pas pour limite $f(0,0) = 0$.

Pour aller plus loin :

6. (a) *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $(x_1, ..., x_{n-1})$ un élément fixé de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto N(x_1, ..., x_{n-1}, t)$. Démontrer que ϕ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$ et que ϕ atteint sa borne inférieure en au moins un point de $\mathbb{R}$.*

(b) *N est toujours une norme sur $\mathbb{R}^n$; à tout $(x_1, ..., x_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ on associe $N_1(x_1, ..., x_{n-1}) = \min_{t\in\mathbb{R}} N(x_1, ..., x_{n-1}, t)$; démontrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^{n-1}$.*

(c) *Déduire de ce qui précède que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.* c3-069

7. *Soit E, F des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de dimensions finies. Prouver que $u \in \mathscr{L}(E, F) \mapsto \|u\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \dfrac{N_F(u(x))}{N_E(x)}$ est une norme.*
Désormais, $E = F$; prouver que $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$ et qu'elle vérifie : $\forall(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $\|v\circ u\| \leq \|v\|.\|u\|$.

8. *Prouver que si P est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et que P est fermé et distinct de $\mathbb{R}$, alors il existe $c_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $P = c_0\mathbb{Z}$.* C3-52

9. *Soit $f : E \to F$ où E et F sont deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés.*
On suppose que f est bornée sur la boule unité et que $\forall(x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$.
Démontrer que f est linéaire. c3-064

Pour s'entraîner :

10. (a) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{e^y - e^x}{y - x} \text{ si } x \neq y \end{array}$. f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?

(b) Soit $f(x, y) = \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq [0, 0)$. f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$? c3-002

11. Soit $(x, y) \mapsto N(x, y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{x + ty}{1 + t^2}\right|$. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter $\overline{B}(O, R)$ pour cette norme. Justifier directement que N est équivalente à $\|.\|_\infty$. c3-081

12. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K un compact de E et f une application de K dans E telle que $f(K) \subset K$ et $\forall(x, y) \in K^2, \quad x \neq y \Rightarrow N(f(x) - f(y)) < N(x - y)$.
Prouver que f a un point fixe et un seul. c3-080

13. E est un espace vectoriel normé. Montrer que :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1 + \|x\|} \end{array}$$

induit une bijection g de E sur la boule unité ouverte.
Montrer que g est lipschitzienne et que g^{-1} est continue et non lipschitzienne. C3-026

14. Montrer que $f = (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{1 + e^{x^2+2y^2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. *Centrale* c3-009

15. Soit f continue sur $[0, 1]$ vérifiant $f^2 = f$. Montrer que f admet au moins un point fixe, puis que l'ensemble des points fixes de f est un segment *CCP* c3-012

16. Pour $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, soit $N(A) = \sup_i \sum_j |a_{ij}|$.

(a) Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

(b) On étudie l'application tr de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ muni de la norme N dans $\mathbb{C}$.
Justifier la continuité de tr.
Déterminer un majorant de $\left\{\dfrac{|\mathrm{tr}A|}{N(A)}\right\}_{A\neq 0}$.

(c) Démontrer que $\sup\left\{\dfrac{|\mathrm{tr}A|}{N(A)}\right\}_{A\neq 0} = n$.

(d) Démontrer que $\left\{\dfrac{|\mathrm{tr}A|}{N(A)}\right\}_{A\neq 0} = [0, n]$.

C3-60