REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

Exercice 1

1) Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2) Déterminer les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres.
3) La matrice A est-elle diagonalisable ?
4) Calculer A^n.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et φ l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

1) Déterminer l'image par φ du vecteur $u = -2e_1 + e_2 + 2e_3$.
2) Déterminer le noyau de φ.
3) Montrer que 2 est valeur propre de φ. Déterminer le sous-espace propre associé.
4) Montrer que φ est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres.

Exercice 3 (d'après ESC 2002 voie E)

On considère un paramètre réel m. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, quel que soit le réel m, 0 est valeur propre de f.
2) Montrer que A^2 et A^3 ne dépendent pas de m. Les comparer.
3) En déduire que 0 et 2 sont les seules valeurs propres possibles de f.
4) Montrer que, quel que soit le réel m, 2 est valeur propre de f.
5) Dans cette question, on suppose que $m = 0$.
   a) Déterminer le sous-espace propre de f associé à $\lambda = 2$.
   b) Déterminer le sous-espace propre de f associé à $\lambda = 0$.
   c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
6) Dans cette question, on suppose que $m \neq 0$.
   a) Déterminer le sous-espace propre de f associé à $\lambda = 2$.
   b) Déterminer le sous-espace propre de f associé à $\lambda = 0$.
   c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   d) Montrer que les vecteurs $u = (0,1,-1)$, $v = (1,1,-1)$ et $w = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice B de f dans cette base.
   e) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (d'après HEC 2001 voie E)

Soit m un paramètre réel. On considère la matrice $H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice H_m dans la base canonique.

1) On suppose dans cette question que $m = 2$.
   a) Déterminer les valeurs propres de h_2 et les sous-espaces propres associés.
   b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable? Si oui, donner une base de vecteurs propres de h_2.
2) Etudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de h_0. La matrice H_0 est-elle diagonalisable ?
3) On revient au cas général.
   a) Montrer qu'il existe un réel a, que l'on déterminera, qui est valeur propre de h_m pour toutes les valeurs du paramètre m.
   b) Déterminer, pour chaque valeur de m, le sous-espace propre associé à la valeur propre a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.
4) Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$. Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$, puis montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.
5) Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire les valeurs de m pour lesquelles la matrice H_m est diagonalisable.

Exercice 5 (d'après EDHEC 2007 voie S)

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (I, J, K, L). On pose $A = J + K$.

1) Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E.
2) a) Exprimer JK, KL, et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
   b) Calculer J^2, K^2 et L^2, puis en déduire KJ, LK, et JL en fonction de L, J et K.
   c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel.
3) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
4) On considère l'application φ qui à toute matrice M de E associe $\varphi(M) = AMA^{-1}$.
   a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   b) Montrer que φ est un automorphisme de E.
5) a) Ecrire la matrice Φ de φ dans la base (I, J, K, L).
   b) Calculer Φ^2. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de φ ?
   c) Montrer que $A = J + K$ et $B = J - K$ sont des vecteurs propres de φ.
   d) En déduire toutes les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.
   e) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
6) Démontrer que φ est une symétrie dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 6 (d'après ESC 2001 voie S et Ecricome 95 voie S)

Partie A

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.
2) Déterminer les sous-espaces propres associés.
3) En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, associe le polynôme $f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Montrer que le polynôme $(X+1)^2$ est un vecteur propre de f.
3) Déterminer la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4) En déduire (sans calculs) les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Partie C

Soit un entier $n \geq 2$. Soit f_n l'application qui , à tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, associe le polynôme $f_n(P) = (nX+1)P + (1-X^2)P'$.

1) Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que si P est un polynôme non nul et $d°P < n$, alors $d°[f_n(P)] = d°P+1$. En déduire que si P est un vecteur propre de f_n, alors $d°P = n$.
3) Soit P un vecteur propre de f_n associé à une valeur propre λ. Soit α une racine de P distincte de 1 et de (-1).
   a) Montrer que $P'(\alpha) = 0$.
   b) En utilisant la formule de Leibniz, montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad (1-X^2)P^{(k+1)} + [(n-2k)X + 1 - \lambda]P^{(k)} + k(n-k+1)P^{(k-1)} = 0.$$
   c) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad P^{(k)}(\alpha) = 0$.
   d) En déduire que les racines d'un vecteur propre P de f_n appartiennent à $\{-1, 1\}$.
4) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $P_k = (X+1)^k (X-1)^{n-k}$ est vecteur propre de f_n et préciser la valeur propre associée.
5) En déduire que l'endomorphisme f_n est diagonalisable.

Exercice 7 (Ecricome 2010 voie S)

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application qui à tout polynôme P de $E = \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $f(P) = P'' - 4XP'$.

1) Justifier que f est un endomorphisme de E.
2) Calculer $f(1)$, $f(X)$, puis $f(X^k)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$. En déduire la matrice A_n de f dans la base canonique de E.
3) Montrer que f est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.
4) Soit P un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ. Montrer que : $\lambda = -4\,\mathrm{d}°P$.

5) En déduire qu'il existe un unique polynôme H_n de degré n et de coefficient dominant 1 qui vérifie la relation $(*)$: $f(H_n) = -4nH_n$.
6) Calculer H_0 et H_1.

Partie B

1) En dérivant la relation $(*)$, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(H'_n) = -4(n-1)H'_n$.
2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H'_n = nH_{n-1}$ et $\forall n \geq 2 \quad H_n - XH_{n-1} + \dfrac{n-1}{4} H_{n-2} = 0$.
3) En déduire H_2 et H_3.
4) On pose $u_n = H_n(1)$. Ecrire un programme en Turbo-Pascal calculant u_{2011}.

Exercice 8

L'objectif du problème est de définir une exponentielle dans l'ensemble des matrices carrées, et de montrer qu'elle vérifie les propriétés usuelles de l'exponentielle.
On étudie d'abord des cas particuliers, ensuite on généralise.
On dira qu'une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les éléments sont notés $a_{i,j}(p)$, converge vers une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout (i, j) de $[\![1,n]\!]^2$, la suite de terme général $a_{i,j}(p)$ est convergente et si $\lim\limits_{p\to+\infty} a_{i,j}(p) = a_{i,j}$.
On vérifie facilement que si deux suites $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergent respectivement vers *A* et *B*, alors la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers *AB*.

Partie A : Cas des matrices nilpotentes

Une matrice carrée *M* est nilpotente s'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $M^p = 0$. Avec la convention $M^0 = I$, on définit alors les matrices suivantes :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k \qquad \ln(I+M) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} M^k$$

1) Dans cette question, on suppose que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer *M* est nilpotente.
   b) Déterminer les matrices $\exp(M)$ et $\ln(I+M)$.
2) Soit *E* l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments de la diagonale sont nuls.
   a) Montrer que *E* est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et donner sa dimension.
   b) Les matrices de *E* sont-elles inversibles ? diagonalisables ?
3) Soit *A* désigne une matrice quelconque de *E*.
   a) Calculer A^k pour tout entier naturel *k*.
   b) Exprimer les matrices $\exp(A)$ et $\ln(I+A)$ en fonction de *I* et de *A*.
   c) Montrer que $\ln[\exp(A)] = A$.
   d) Montrer que $\exp[\ln(I+A)] = I + A$.
   e) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad [\exp(A)]^p = \exp(pA)$.
   f) Montrer que $\exp(A)$ est inversible et que : $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$.
4) Soient *A* et *B* deux matrices de *E*. Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si et seulement si *A* et *B* commutent.

5) Dans cette question, on suppose que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
   b) Montrer qu'il existe une matrice P inversible que l'on déterminera telle que $T = P^{-1}MP$ appartienne à E.
6) Soit F l'ensemble des matrices M carrées d'ordre 3 telles qu'il existe une matrice P inversible et une matrice T de E vérifiant : $M = PTP^{-1}$. Soit M un élément de F.
   a) Démontrer que M est nilpotente et exprimer $\exp(M)$ en fonction de $\exp(T)$.
   b) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N} \quad [\exp(M)]^p = \exp(pM)$, que $\exp(M)$ est inversible et que : $[\exp(M)]^{-1} = \exp(-M)$.

<u>Partie B : Cas des matrices diagonalisables</u>

1) Soit B la matrice définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que B est diagonalisable. En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.
   b) En déduire B^p pour tout entier naturel p, puis la matrice $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} B^k$.
   c) Montrer que la suite (S_p) converge vers une matrice notée : $\exp(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k$.
2) Soit D une matrice diagonale d'ordre n.
   a) On définit comme précédemment : $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k$. Montrer que la suite (S_p) converge vers une matrice notée : $\exp(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k$. La calculer.
   b) Démontrer que, pour toute matrice diagonale D :
      i) $\exp(D)$ est inversible et $[\exp(D)]^{-1} = \exp(-D)$.
      ii) $\forall p \in \mathbb{N} \quad [\exp(D)]^p = \exp(pD)$.
      iii) pour toutes matrices diagonales D et D', on a : $\exp(D + D') = \exp(D)\exp(D')$.
3) Soit M une matrice carrée d'ordre n diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et D une matrice diagonale.
   a) On définit comme précédemment : $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} M^k$. Montrer que la suite (S_p) converge vers une matrice notée : $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$. La calculer en fonction de $\exp(D)$.
   b) En déduire que, pour toute matrice diagonalisable M :
      i) $\exp(M)$ est inversible et $[\exp(M)]^{-1} = \exp(-M)$.
      ii) $\forall p \in \mathbb{N} \quad [\exp(M)]^p = \exp(pM)$.
4) Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices A et B dans la base canonique. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
   a) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.
   b) En déduire que si f admet n valeurs propres distinctes, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

c) En déduire que si A et B commutent, et si l'une des deux matrices possède n valeurs propres distinctes, alors : $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$.

Exercice 9 (Inspiré d'oral ESCP 2009)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On appelle carré magique d'ordre 3, toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les sommes des coefficients de chacune des trois lignes, de chacune des trois colonnes et de chacune des deux diagonales soient égales.

Autrement dit : si $A=(a_{i,j})$ alors A est un carré magique s'il existe un réel $s(A)$ tel que : $\forall (i,j)\in [\![1,3]\!]^2 \quad s(A)=\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}=\sum_{k=1}^{3} a_{k,j}=\sum_{k=1}^{3} a_{k,k}=\sum_{k=1}^{3} a_{k,3-k}$.

1) On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble des carrés magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
   a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que l'application s définie sur $\mathcal{C}$, qui à tout A de $\mathcal{C}$ associe le réel $s(A)$, est linéaire.
   b) Montrer que, pour tout A de $\mathcal{C}$, il existe un réel λ tel que $A-\lambda J\in \mathrm{Ker}(s)$.
   c) En déduire que : $\mathcal{C}=\mathrm{Vect}(J)\oplus \mathrm{Ker}(s)$.
2) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On rappelle que : $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})=\mathcal{S}\oplus\mathcal{A}$.
   a) Montrer que : $\mathrm{Ker}(s)=(\mathcal{S}\cap \mathrm{Ker}(s))\oplus(\mathcal{A}\cap\mathcal{C})$.
   b) Déterminer $\mathcal{S}\cap\mathrm{Ker}(s)$ et $\mathcal{A}\cap\mathcal{C}$. En déduire une base de $\mathcal{C}$.
3) Déterminer un vecteur propre commun à tous les carrés magiques.
4) On cherche tous les carrés magiques A pour lesquels A^2 est un carré magique.
   a) Montrer que si A répond à la question, alors $s(A^2)=[s(A)]^2$.
   b) En utilisant la base de $\mathcal{C}$ trouvée au 2), déterminer tous les carrés magiques A pour lesquels A^2 est un carré magique.

Exercice 10 (d'après ESC 99 voie S)

Partie A

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et soit λ un réel.

On note $f^2=f\circ f$, et plus généralement : $\forall n\geq 2 \quad f^n=f\circ f^{n-1}$.

1) Montrer que l'ensemble $F_\lambda=\{u\in E / f(u)=\lambda u\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) Soit $u\in F_\lambda$. Pour tout entier $n\geq 1$, exprimer $f^n(u)$ en fonction de λ, n et u.
3) Dans cette question, on suppose $E=\mathbb{R}^3$ et que f est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$. Soit $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
   a) Calculer $M^2-3M+2I$. En déduire que : $\forall u\in E \quad f^2(u)=3f(u)-2u$.
   b) En déduire que si $\lambda\neq 1$ et $\lambda\neq 2$, alors $F_\lambda=\{0_E\}$.
   c) Déterminer le sous-espace F_1 et préciser une base de F_1.
   d) Déterminer le sous-espace F_2 et préciser une base de F_2.
   e) Les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires ?

Partie B

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel réel de dimension $n\geq 1$.

Soit f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 = 3f - 2Id_E$.

1) On pose : $g = f - Id_E$ et $h = f - 2Id_E$.
   a) Calculer $g - h$. En déduire que : $E = \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im}(h)$.
   b) Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$. En déduire que $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(h)$.
   c) Démontrer que : $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h)$.
2) Par convention, on pose $f^0 = Id_E$.
   a) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n = a_n f + b_n Id_E$.
   b) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1 et b_1.
   c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.
   d) En déduire a_n et b_n en fonction de n. En déduire f^n en fonction de n, f et Id_E.

<u>Exercice 11 (EM Lyon 2011 voie E)</u>

On considère les matrices carrées d'ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>Partie A</u>

1) Sans calcul, justifier que la matrice A n'est pas inversible.
2) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.
4) En déduire une matrice diagonale D (dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant) et une matrice inversible P (dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1) telles que : $A = PDP^{-1}$.
5) Calculer la matrice P^{-1}.
6) Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ (dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant) telle que : $\Delta^2 = D$. Déterminer Δ.
7) On note : $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer que : $R^2 = A$ et calculer R.

<u>Partie B</u>

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère les endomorphismes f et g dont les matrices sont respectivement A et R dans la base $\mathscr{B}$.

On note $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ la base de E telle que la matrice P trouvée au **A-4)** soit la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

1) Déterminer les matrices de f et de g dans la base $\mathscr{B}'$.
2) a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$.
   b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.
3) a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\, g$.
   b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\, g$.
4) Trouver au moins un endomorphisme h de E tel que : $g = f \circ h$. On déterminera h par sa matrice H dans la base $\mathscr{B}'$, puis on exprimera la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$ à l'aide de H et de P.

<u>Exercice 12 (d'après EDHEC 2011 voie S)</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E.

On note Id l'identité de E et si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme : $P(u) = a_0 Id + a_1 u + ... + a_p u^p$.

Dans toute la suite, P est un polynôme qui admet 1 comme racine simple, donc il existe un polynôme Q tel que : $P(X)=(X-1)Q(X)$ avec $Q(1)\neq 0$.

On suppose que $P(u)=0$, et on note : $v=Q(u)$.

1) Montrer que : $\mathrm{Im}(u-Id)\subset \mathrm{Ker}\, v$.
2) On note $F=\mathrm{Ker}(u-Id)$.
   a) Montrer que : $\forall x\in F \quad v(x)=Q(1)x$.
   b) En déduire que $F\cap \mathrm{Ker}\, v=\{0_E\}$.
   c) En déduire, à l'aide du théorème du rang, que : $E=F\oplus \mathrm{Ker}\, v$.
3) Montrer que $Q(u)=0$ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de *u*.
4) On suppose dans cette question, que $\dim E=3$, que $P(X)=(X-1)(X+1)^2$ et que 1 est valeur propre de *u*. On note E_1 le sous-espace propre de *u* associé à la valeur propre 1. Montrer que si $\dim E_1\geq 2$, alors *u* est diagonalisable (on pourra distinguer les cas $\dim E_1=2$ et $\dim E_1=3$).

Exercice 13 (d'après Ecricome 2011 voie E)

On dit qu'une matrice N carrée d'ordre n est nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que $N^k=0$.

Etant donnée une matrice A carrée d'ordre n, on dira qu'un couple (Δ, N) de matrices carrées d'ordre n est une décomposition de Dunford de la matrice A si :

- Δ est une matrice carrée d'ordre n diagonalisable.
- N est une matrice carrée d'ordre n nilpotente.
- $A=\Delta+N$ et $\Delta N=N\Delta$.

Partie A

1) Montrer que si la matrice A est diagonalisable, elle admet une décomposition de Dunford. On précisera les matrices Δ et N.
2) Dans cette question, on suppose que : $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.
   a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
   b) Montrer que la matrice $N=A-I$ est nilpotente.
   c) En déduire une décomposition de Dunford de la matrice A.
3) Dans cette question, on suppose que $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

   On pourra introduire l'endomorphisme f de $E=\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.
   a) Montrer que la matrice N est nilpotente.
   b) Montrer que, cependant, les matrices Δ et N ne forment pas une décomposition de Dunford de la matrice A.
   c) Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
   d) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit égale à la matrice $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.
   e) Déterminer une décomposition de Dunford de la matrice B.
   f) En déduire une décomposition de Dunford (Δ', N') de la matrice A. On explicitera les deux matrices.
   g) En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique, et on notera Id l'application identité de E.

1) Montrer que le polynôme $P(X)=(X-1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
2) En déduire les valeurs propres de A.
3) Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
4) Soient $C_1=\text{Ker}(f-Id)^2$ et $C_2=\text{Ker}(f-2Id)$.
   a) Déterminer une base de C_1 et de C_2.
   b) Montrer que la réunion de ces deux bases est une base $\mathscr{B}$ de E.
   c) Déterminer la matrice A' de f sur la base $\mathscr{B}$.
   d) Montrer que A' admet une décomposition de Dunford.
   e) En déduire une décomposition de Dunford de A. On explicitera les deux matrices.
5) Montrer que C_1 et C_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
6) Soit p la projection sur C_1 suivant C_2, et q la projection sur C_2 suivant C_1.
   a) Déterminer pour tout vecteur $u=(x,y,z)$ de E les vecteurs $u_1=p(u)$ et $u_2=q(u)$ en fonction de x, y et z.
   b) En déduire les matrices de p et de q dans la base canonique de E.
   c) Comparer la matrice de l'endomorphisme $g=p+2q$ dans la base canonique de E avec la décomposition de Dunford de A.