1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$; on pose $f_0(x) = x$ et $\forall k \in \mathbb{N} f_{k+1} = f_k \circ f$.
 Démontrer que la famille $(f_k, k \in \mathbb{N})$ est libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

A6-024

Soit une sous-famille finie $(f_{k_1}, \dots, f_{k_p})$ ordonnée de manière que $k_1 < \dots < k_p$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_{k_i} = 0$.

$f_{k+1} = f_k \circ f = f \circ f_k = \ln(1+f_k)$ donc par récurrence immédiate $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{+\infty} f_k = +\infty$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}, f_{k+1} = o_{+\infty}(f_k)$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_{k_i} \underset{+\infty}{\sim} \lambda_1 f_{k_1}$ ce qui est absurde donc il faut que $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_p = 0$.

2. Soit E un K -espace vectoriel, p un projecteur et $f \in \mathcal{L}_K(E)$. Démontrer que p commute avec f si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{ker}(p)$ sont stables par f .

A6-14

On sait que, si p commute à f , alors $\text{Im}(p)$ et $\text{ker}(p)$ sont stables par f .

Supposons $\text{Im}(p)$ et $\text{ker}(p)$ stables par f et soit $x \in E$.

Si $x \in \text{Im}(p)$, alors $f(x) \in \text{Im}(p)$ donc x et $f(x)$ sont invariants par p d'où $(f \circ p - p \circ f)(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Si $x \in \text{ker}(p)$, alors $f(x) \in \text{ker}(p)$ donc $(f \circ p - p \circ f)(x) = f(0) - 0 = 0$.

p est un projecteur donc $\text{Im}(p)$ et $\text{ker}(p)$ sont supplémentaires d'où le cas x quelconque.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que $\text{ker}(u^3 - u) = \text{ker } u \oplus \text{ker}(u - Id) \oplus \text{ker}(u + Id)$.

$u^3 - u = (u^2 - Id) \circ u$ donc $\text{ker } u \subset \text{ker}(u^3 - u)$ et de même pour $\text{ker}(u - Id)$ et $\text{ker}(u + Id)$.

Soit $L_0(X) = \frac{(X-1)(X+1)}{(-1).(1)}, L_1(X) = \frac{X(X+1)}{(1).(2)}, L_{-1}(X) = \frac{X(X-1)}{(-1).(-2)}$ la base de Lagrange

de $\mathbb{K}_2[X]$ associée à $(0, 1, -1)$ et $x \in \text{ker}(u^3 - u)$.

Soit $x_0 = (L_0(u))(x), x_1 = (L_1(u))(x), x_{-1} = (L_{-1}(u))(x)$.

$L_0 + L_1 + L_{-1} = 1$ donc $L_0(u) + L_1(u) + L_{-1}(u) = Id_E$ et $x = x_0 + x_1 + x_{-1}$.

$u(x_0) = \frac{u^3 - u}{(-1).(1)}(x) = 0$ donc $x_0 \in \text{ker } u$ et de même pour les 2 autres termes.

On a donc prouvé que : $\text{ker}(u^3 - u) = \text{ker } u + \text{ker}(u - Id) + \text{ker}(u + Id)$.

Soit $(x_0, x_1, x_{-1}) \in \text{ker } u \times \text{ker}(u - Id) \times \text{ker}(u + Id)$ tel que $x_0 + x_1 + x_{-1} = 0$.

$\forall (i, j) \in \{0, 1, -1\}^2, i \neq j \Rightarrow (L_i(u))(x_j) = 0$.

$x_0 = (L_0(u) + L_1(u) + L_{-1}(u))(x_0) = (L_0(u))(x_0) = -(L_0(u))(x_1 + x_{-1})$ donc $x_0 = 0$ et de même pour x_1 et x_{-1} donc la somme est directe.

4. Soit E de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang r tel que $u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Prouver que $r \leq n/2$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \\ Id_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}$.

$\text{Im}(u) \subset \text{ker}(u)$ donc $r \leq n - r$.

Soit $(\varepsilon_{n-r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\text{Im}(u)$. Il existe $(e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ tel que $\forall i, u(e_i) = \varepsilon_i$.

$F = (e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ est libre (puisque son image par u l'est) et $\text{Vect}(F) \cap \text{ker } u = \{0\}$ car

$$\sum_i \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \sum_i \lambda_i \varepsilon_i = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0.$$

Il existe donc une base $(e_1, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ adaptée à $\text{ker } u \oplus \text{Vect}(F)$ qui répond à la question.

5. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$. Pour $f \in E$, on pose $\phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ si $x \neq 0$ et $\phi(f)(0) = f(0)$.
 Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E . Est-il injectif? surjectif? Déterminer ses éléments propres.

a0-088

D'après le thm fondamental, $F = x \mapsto \int_0^x f$ et $\Phi(f)$ sont $\mathcal{C}^1$ donc $\mathcal{C}^0$ sur $]0, 1]$.

$$\Phi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0) \text{ donc } \Phi(f) \text{ est continue en } 0^+.$$

De plus $\forall \dots$ donc ϕ est linéaire.

$f \in \text{ker } \Phi \iff \forall x \in]0, 1], F(x) = 0$ et $f(0) = 0$.

$F \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ donc $\forall x \in]0, 1], F(x) = 0 \iff \forall x \in [0, 1], F(x) = 0 \iff (F(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, 1], F'(x) = f(x) = 0$

donc $\ker \phi = O$).

$\text{Im}(\phi) \subset C^1(]0, 1]) \cap C^0([0, 1])$ donc Φ n'est pas surjective.

Φ est injectif donc 0 n'est pas valeur propre. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

((1) $f \in C^0([0, 1])$ et $\phi(f) = \lambda f$) $\iff$ ($f \in C^0([0, 1])$ et $\forall x \in [0, 1[, F(x) = \lambda x f(x)$ et $f(0) = \lambda f(0)$).

Cas $\lambda \neq 1$:

Alors (1) $\iff$ $f \in C^0([0, 1])$ et $\begin{cases} f(0) = 0 \\ x \rightarrow F(x) - \lambda x f(x) \text{ est constante sur }]0, 1] \\ \lim_{x \rightarrow 0} F(x) - \lambda x f(x) = 0 \end{cases}$

or $f = \frac{F}{Id}$ est C^1 sur $]0, 1]$ donc

(1) $\iff$ $f \in C^0([0, 1])$ et $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0, 1], f(x) - \lambda x f'(x) - \lambda f(x) = 0 \end{cases}$

(1) $\iff$ $f \in C^0([0, 1])$ et $\forall x \in]0, 1], f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ (2).

λ est valeur propre si et seulement s'il existe $K \neq 0$ tel que F définie en (2) est de limite 0 en 0 ie ssi $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$ ou $\lambda \in]0, 1[$. L'espace propre est alors la droite engendrée par $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ si $x \neq 0, 0$ sinon.

Cas $\lambda = 1$: (1) $\iff$ $f \in C^0([0, 1])$ et $f = K$. 1 est valeur propre et E_1 est l'ensemble des constantes de $C^0([0, 1])$.

6. Dans E , $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , soit $f_1, f_2, \dots, f_n$ n endomorphismes nilpotents et deux à deux permutable.

Montrer que : $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \dots \circ f_n = 0$.

A7-060

Soit $g_k = f_{n-k} \circ \dots \circ f_n$ et $r_k = \text{rg}(g_k)$ pour $k = 0 \dots n - 1$. Il s'agit de prouver que $r_{n-1} = 0$.

Si $k \leq n - 2$, alors $\text{Im}(g_{k+1}) = f_{n-k-1}(\text{Im}(g_k))$ donc $r_{k+1} \leq r_k$: (r_k) est une suite finie décroissante d'entiers naturels.

Supposons $k \leq n - 2$ et $r_k \neq 0$.

g_k commute avec f_{n-k-1} donc f_{n-k-1} induit un endomorphisme h de $\text{Im}(g_k)$ et $\text{Im}(h) = \text{Im}(g_{k+1})$.

Le thm du rang donne : $\dim(\text{Im}(g_k)) = \dim \ker h + \dim \text{Im} h$ soit $r_k = \dim \ker h + r_{k+1}$.

h est nilpotent sur $\text{Im}(g_k)$ qui n'est pas l'espace $\{0\}$ donc $\dim \ker h \geq 1$ non inversible donc $r_{k+1} < r_k$ ie la décroissance est stricte.

Il y a donc 2 cas possibles : ou bien $r_{n-2} = 0$; alors $r_{n-1} \leq r_{n-2} = 0$. Ou bien $r_{n-2} \neq 0$; alors $r_{n-1} < r_{n-2} < r_{n-3} < \dots < r_0 = \text{rg}(f_n)$; f_n est nilpotent sur $E \neq \{0\}$ donc $r_0 \leq n - 1$ et encore $r_{n-1} \leq 0$.

7. Soit $p_1, p_2, \dots, p_n$ n projecteurs d'un K -espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que : $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ est un projecteur $\iff \forall (i, j) \quad p_i \circ p_j = \delta_i^j p_i$.

(On pourra montrer que $\text{Im}(\sum_1^n p_i) = \bigoplus_1^n \text{Im} p_i$.)

a7-70

8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque et p un entier naturel non nul.

$\phi_1, \dots, \phi_p$ sont des formes linéaires sur E .

Démontrer que $(\phi_1, \dots, \phi_p)$ libre $\iff (x \in E \mapsto (\phi_1(x), \dots, \phi_p(x))) \in \mathbb{K}^p$ surjective.

9. Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, E^* son dual et E^{} le dual de E^* . Prouver que $\Theta : X \in E \mapsto \Theta(X) = (Y \in E \mapsto {}^t X Y \in \mathbb{K})$ est un isomorphisme entre E et E^{**} .**

10. Soit $f = (x \mapsto x e^x \cos x), g = (x \mapsto e^x \sin x), h = (x \mapsto \arctan x)$. Prouver que (f, g, h) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

a6-037

11. Soit n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$; pour tout entier $k, \Phi_k(x) = \frac{1}{x^2 + a_k^2}$; la famille des Φ_k est-elle libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Mines

a6-16

12. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ pour lequel il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(0) = 0, \quad P'(0) \neq 0, \quad P(f) = 0.$$

Prouver que $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$. Mines

a6-004

13. Soit V un espace vectoriel de dimension n , W_1 et W_2 deux sous-espaces de V de même dimension q . Démontrer que W_1 et W_2 ont un supplémentaire commun. a7-75

14. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre p , $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$ et $F = \text{Vect} \left(f^{(k)}(a) \right)_{k \in \mathbb{N}}$.

(a) Prouver que $\left(f^{(k)}(a) \right)_{k \in [0, p-1]}$ est une base de F .

(b) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(f^{(p-1)}(a)) \neq 0$; prouver que φ existe. Soit $H = \{x \in E / \forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi \circ f^k(x) = 0\}$; démontrer que H est un supplémentaire de F stable par f .

(c) Décrire la matrice de f dans une base adaptée à $F \oplus H$.

Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ vérifie $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$ et $a_{i,i+1} \in \{0, 1\}$. A7-80

15. Soit E un espace vectoriel de dimension n , p un projecteur de rang r non nul et distinct de n ; soit l'application Φ qui à $f \in \mathcal{L}(E)$ associe $-p \circ f + f \circ p$. Déterminer les valeurs propres de Φ et les dimensions des sous-espaces propres associés. *Mines* a0-042

16. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.

On lui associe la fonction $g = u(f)$ définie par $g(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt$.

Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$.

Déterminer les éléments propres de u . A0-061

17. Soit $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. A tout élément P de $\mathbb{R}_3[X]$, on associe le reste $\phi(P)$ de la division euclidienne de AP par B .

Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$; déterminer son noyau et ses éléments propres. A0-101

18. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et f l'application de E dans E qui, à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$[f(P)](X) = (a - X)(X - b)P'(X) + nXP(X)$$

où a et b sont deux nombres réels.

Démontrer que f est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Démontrer que le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f . a0-058

19. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs réelles.

Si $f \in E$, on note F l'application de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2|x - y|) f(y) dy.$$

On note A l'application définie par $\forall f \in E \quad A(f) = F$.

Montrer que A est un endomorphisme injectif de E .

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de A . a0-41