1. Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & x \end{vmatrix}$. Calculer $\Delta_n(x)$ (On distinguera les cas $|x| < 2, |x| = 2, |x| > 2$).
Etudier son degré, sa parité. Démontrer que toutes ses racines sont réelles. *Centrale* a8-23

En développant par rapport à la première colonne ; $\forall n \geq 3,\ \Delta_n(x) = x\Delta_{n-1}(x) - \Delta_{n-2}(x)$, relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - xr + 1 = 0$.
Cas $|x| < 2$: $x = 2\cos\theta$ pour un $\theta \in]0, \pi[$.
La solution générale de la récurrence est $Ar_1^n + Br_2^n$ ou mieux $Ar_1^{n-1} + Br_2^{n-1}$ avec $r_1 = e^{i\theta}$ et $r_2 = r_1^{-1}$ avec la condition initiale : $\Delta_1(x) = x = r_1 + r_1^{-1} = A + B$ et $\Delta_2(x) = x^2 - 1 = r_1^2 + r_1^{-2} + 1 = Ar_1 + Br_1^{-1}$.
$A = \dfrac{-r_1^2}{r_2 - r_1}$ et $B\dfrac{r_2^2}{r_2 - r_1}$ d'où $\Delta_n(x) = \dfrac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2 - r_1} = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
Cas $|x| > 2$: $x = 2\varepsilon\cosh\theta$ et de même $\Delta_n(x) = \dfrac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}$.
Cas $|x| = 2$: Δ_n est polynômial donc continu sur $\mathbb{R}$ donc $\Delta_n(2) = \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = n + 1$ et
$\Delta_n(-2) = \lim\limits_{\theta\to\pi} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin(n+1)(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} = (-1)^n\Delta_n(2)$.

2. Soit $A = (|i - j|) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; calculer $\det A$. a8-056

Par opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1},\ i = 1..n-1$, $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & (-1) & \ddots & & (1) \\ -1 & & & -1 & 1 \\ n-1 & & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Par opérations élémentaires $C_i \leftarrow L_i + C_1,\ i = 2..n$, $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \\ -1 & -2 & 0 & \vdots & \\ \vdots & (-2) & \ddots & & (0) \\ -1 & & & -2 & 0 \\ n-1 & & \dots & n & n-1 \end{vmatrix}$.

On obtient un déterminant triangulaire : $\det(A) = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée et $T : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(T)$. A8-041

On utilise la base usuelle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'ordre :$E_{1,1}, E_{2,1}, ..., E_{n,1}, E_{1,2}, ...E_{n,2}, E_{1,3}, ..., E_{n,3}, ..., E_{n,n}$.
La matrice de T est alors triangulaire par blocs car $Vect(E_{1,j}, ..., E_{n,j})$ est stable par T. En effet $T(E_{i,j}) = \sum\limits_k a_{k,i}E_{k,j}$.
De plus la $i-$ème colonne du $j-$ème bloc est ${}^t(a_{1,i}, ..., a_{n,i})$ donc le $j-$ème bloc est ${}^tA$.
On a donc $\det T = (\det A)^n$.

4. Soit $(A, B, C, D) \in (\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}))^3 \times GL_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,2n}(\mathbb{K})$.

Démontrer l'existence de $(U, V, X, Y) \in (\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}))^4$ telles que $M = \begin{pmatrix} I_n & U \\ O_n & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & O_n \\ Y & I_n \end{pmatrix}$.
Montrer que, si C et D commutent, alors $\det M = \det(A.D - B.C)$. Démontrer que ce résultat reste vrai si D n'est pas inversible. A8-030

$M = \begin{pmatrix} I_n & U \\ O_n & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & O_n \\ Y & I_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A = X + UY \\ B = U \\ C = VY \\ D = V \end{cases} \iff \begin{cases} U = B \\ V = D \\ Y = D^{-1}C \\ X = A - BD^{-1}C \end{cases}$ d'où l'existence(-unicité) de la solution.
$\det M = \det V \det X = \det XV$ or $XV = AD - BD^{-1}(CD) = AD - BC$ puisque C et D commutent.

Si D est inversible, il existe une suite (λ_p) de limite 0 telle que $\forall p,\ D-\lambda_p I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ ($\det(D-\lambda I_n)$ est un polynôme en λ donc ne s'annule pas sur un intervalle $]0,\alpha]$)
$\forall p,\ \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D-\lambda_p I_n \end{pmatrix} = \det(A.(D-\lambda_p I_n) - B.C)$, et les deux membres sont polynômiaux donc continus en λ_p donc $\det M = \det(A.D - B.C)$.

5. **Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Prouver qu'elles sont semblables dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.** a8-060

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $AP = PB$ et $P = P_1 + iP_2$ avec $(P_1, P_2) \in (\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}))^2$, mais a priori peut-être toutes les 2 non inversibles.
$(AP_1 - P_1B) + i(AP_2 - P_2B) = 0$ et A, B sont réelles donc $AP_1 - P_1B = AP_2 - P_2B = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ A(P_1 + tP_2) = (P_1 + tP_2)B$.
$h(X) = \det(P_1 + XP_2) \in \mathbb{C}[X]$ et $h(i) \neq 0$ donc $h(X)$ n'est pas le polynôme nul. $\{t \in \mathbb{R} / h(t) = 0\}$ est donc fini ; on peut donc choisir $t \in \mathbb{R}$ pour que $P_1 + tP_2$ soit inversible (et réelle) donc A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

---

6. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, C sa comatrice et D la comatrice de C.*
Calculer A^tC et ${}^tCA$; étudier $\mathrm{rg}(C)$; déterminer D. a8-059
7. *A et B sont deux matrices semblables de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Montrer que les comatrices de A et B sont aussi semblables. On prouvera que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.* A8-051
8. *Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$.*
On pourra utiliser une factorisation de A de la forme $A = UJ_rV$ (où r est la rang de A). a8-058

---

9. Soit $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^3$ telles que $AB - BA = C$ et $BC = CB$.
Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ AB^{p+1} = B^p(BA + (p+1)C)$.
Montrer que dans ce cas $\det B = 0$ ou $\det C = 0$. *CCP* a8-008
10. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ avec A et B matrices carrées réelles d'ordre p.
Démontrer que $\det(M) \geq 0$. A8-029
11. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, $A = (C_1, C_2, ..., C_n)$ où les C_i sont les colonnes de A. On pose : $B = (D_1, D_2, ..., D_n)$ avec $D_j = \sum_{i \neq j} C_i$.
Déterminer une relation entre $\det(A)$ et $\det(B)$. A8-038
12. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$. *CCP* a8-005
13. Soit P un polynôme de degré au plus $n-1$ sur $\mathbb{C}$.
Démontrer que : $\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \cdots & P(x+2n) \end{vmatrix} = 0$ A8-022
14. Soit le déterminant d'ordre n : $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} r_1+x & & & (a+x) \\ & r_2+x & & \\ & & \ddots & \\ (b+x) & & & r_n+x \end{vmatrix}$
Démontrer que $\exists (A, B) \in \mathbf{C}^2 \qquad \Delta(x) = Ax + B$. Calculer A et B. *CCP* a8-028

15. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$. A8-47
16. Calculer le déterminant de la matrice $M = (\sup(i,j)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A8-039
17. Calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & (n) \\ (n) & & \ddots & \\ & & & n \end{vmatrix}$. a8-053
18. Calculer le déterminant d'ordre n : $\Delta_n = \begin{vmatrix} x & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & x \end{vmatrix}$

    Etudier ses racines. A8-025