1. **Soit A triangulaire par blocs. A quelle condition est-elle inversible ? Prouver que, si elle existe, A^{-1} est triangulaire par blocs.**

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et soit $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ avec $(A_1, B_1) \in \mathscr{M}_{k,k}^2$.

$$AB = I_n \iff \begin{cases} A_1B_1 + A_2B_3 = I_k \\ A_1B_2 + A_2B_4 = 0 \\ A_4B_3 = 0 \\ A_4 \in GL_{n-k} \text{ et } B_4 = A_4^{-1} \end{cases} \iff \begin{cases} A_1B_1 + A_2B_3 = I_k \\ A_1B_2 = -A_2A_4^{-1} \\ B_3 = 0 \\ A_4 \in GL_{n-k} \text{ et } B_4 = A_4^{-1} \end{cases} \text{car } A_4 \in GL_{n-k}$$

$$\iff \begin{cases} A_1 \in GL_k \text{ et } B_1 = A_1^{-1} \\ B_2 = -A_1^{-1}A_2A_4^{-1} \\ B_3 = 0 \\ A_4 \in GL_{n-k} \text{ et } B_4 = A_4^{-1} \end{cases}$$

donc la CNS est : $A_1 \in GL_k$ et $A_4 \in GL_{n-k}$ et l'inverse éventuelle est $B = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4^{-1} \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}$ qui est bien triangulaire par blocs.

2. **Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases. Prouver que u est une homothétie.**

a7-083

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice de u dans une base. $\forall P \in GL_n, \quad A = PAP^{-1}$ ie A commute avec toutes les matrices inversibles donc avec toute combinaison linéaire de matrices inversibles.
Soit $(E_{i,j})$ la base usuelle de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. $E_{i,j} = (I_n + E_{i,j}) - I_n$, les 2 termes étant des matrices inversibles ; A commute donc avec toutes les matrices $E_{i,j}$.
Soit (i,j) ; $AE_{i,j} = E_{i,j}A \iff \displaystyle\sum_k a_{ki}E_{k,j} = \sum_l a_{jl}E_{i,l} \iff a_{ii} = a_{jj}$ et $\forall k \neq i,\ a_{ki} = 0($ et $\forall l \neq j,\ a_{jl} = 0)$
d'où le résultat.

3. **Prouver qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est de rang 1 si et seulement si il existe $(B, C) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{C})$ tel que $A = BC$, $B \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, $C \neq 0_{\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{C})}$.**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de rang 1. Prouver que $A^2 = (\mathrm{tr}A)A$ et calculer A^p puis $(I_n + A)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

A est de rang 1 si et seulement si $A = (V_1, V_2, ..., V_n)$ et $V_1, ..., V_n$ sont n vecteurs d'une même droite vectorielle ($\mathrm{rg}(A) \leq 1$) et l'un d'eux au moins est non nul ($\mathrm{rg}(A) \neq 0$) ie $V_1 = c_1B, V_2 = c_2B, ..., V_n = c_nB$ où $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $B \neq 0$ et $C = (c_1, ..., c_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $C \neq 0$.

Alors $A = BC$ et $A^2 = B(CB)B$. Or $CB = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_ib_i = \mathrm{tr}(A) \in \mathbb{C}$ qui commute avec B donc $A^2 = (\mathrm{tr}A)A$.
Par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = (\mathrm{tr}A)^{p-1}A$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. I_n et A commutent donc $(I_n + A)^p = I_n + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} A^p = I_n + (\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \mathrm{tr}(A)^{p-1})A$.

Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors $(I_n + A)^p = I_n + pA$. Sinon, $(I_n + A)^p = I_n + [(1 + \mathrm{tr}(A))^n - 1]\dfrac{A}{\mathrm{tr}(A)}$.

4. **Soit $D = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$ avec $a_1, .., a_n$ distincts dans $\mathbb{K}$. Prouver que A commute avec D si et seulement si $A \in \mathbb{K}[D]$.**

Dans la base usuelle de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $D = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kE_{k,k}$ et $A = \displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \alpha_{i,j}E_{i,j}$ et on sait que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ où $\delta_{j,k}$ désigne le symbole de Kronecker.
$AD = DA \iff \displaystyle\sum_{i,j,k} a_k\alpha_{i,j}\delta_{j,k}E_{i,k} = \sum_{i,j,k} a_k\alpha_{i,j}\delta_{k,i}E_{k,j} \iff \sum_{i,j} a_j\alpha_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i,j} a_i\alpha_{i,j}E_{i,j}$
donc $AD = DA \iff \forall (i,j), \quad (a_i - a_j)\alpha_{i,j} = 0$ ($(E_{i,j})$ est libre).
$a_1, ..., a_n$ sont distincts donc $AD = DA \iff \forall (i,j),\ i \neq j \Rightarrow \alpha_{i,j} = 0$, ie A est diagonale.
Soit alors (L_i) la base de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ associée aux points distincts $a_1, ..., a_n$ et

$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} L_i(X)$. $\forall i$, $Q(a_i) = \alpha_{i,i}$ donc $Q(D) = A \in \mathbb{K}[D]$. Réciproquement, tout $A \in \mathbb{K}[D]$ commute avec D.

5. **Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ fixée et soit Φ l'application de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par $\Phi(X) = AX + XA$. Déterminer la trace de Φ en fonction de celle de A.**

$A = \sum_{(k,l)\in(\llbracket 1,n \rrbracket)^2} a_{k,l} E_{k,l}$ et on cherche le coefficient de la composante selon $E_{i,j}$ de $\Phi(E_{i,j})$.

$\Phi(E_{i,j}) = \sum_{k,i,j} a_{k,i} E_{k,j} + \sum_{l,i,j} a_{j,l} E_{i,l}$ donc le coefficient cherché est $a_{i,i} + a_{j,j}$.

$\mathrm{tr}(\Phi) = \sum_{i,j} (a_{i,i} + a_{j,j})$ et $\sum_{i,j} a_{i,i} = \sum_{j} \mathrm{tr}(A) = n\mathrm{tr}(A)$ donc $\mathrm{tr}(\Phi) = 2n\mathrm{tr}(A)$.

6. **A et B étant donnés dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ où l'inconnue X est dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.** A7-049

(On étudie ici un système linéaire de n^2 équations à n^2 inconnues.)

$X + \mathrm{tr}(X)A = B \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} X + tA = B \\ t = \mathrm{tr}(X) \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} X + tA = B \\ t = \mathrm{tr}(B) - t\,\mathrm{tr}(A) \end{cases}$

Si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, alors $X + \mathrm{tr}(X)A = B \iff (\exists t \in \mathbb{R},\ t = \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1+\mathrm{tr}(A)}$ et $)X = B - \dfrac{\mathrm{tr}(B)}{1+\mathrm{tr}(A)}A$ (système de Cramer)

Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$, alors $X + \mathrm{tr}(X)A = B \iff \exists t \in \mathbb{R},\ X = B - tA$ (système indéterminé de rang $n^2 - 1$: 1 paramètre)

Si $\mathrm{tr}(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.

---

7. (a) *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.*
Démontrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle. (On pourra raisonner par récurrence sur n).

   (b) *Soit $D \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont distincts et $u : \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ défini par $u(M) = DM - MD$. Etudier $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.*
En déduire que toute matrice de trace nulle est de la forme $XY - YX$, $(X,Y) \in \mathscr{M}_n^2$ (ie "est un commutateur").
Dans le cas $n = 2$, pour (a,b) donné, chercher (X,Y) avec Y diagonale tel que $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = XY - YX$; en déduire une méthode de calcul de (X,Y).
Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} -15 & 27 & -37 \\ 4 & -11 & 12 \\ 10 & -20 & 26 \end{pmatrix}$, déterminer (X,Y).

Mines a7-050

8. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique.*

   (a) *On suppose $a_{12} \neq 0$, et on décompose A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} J & U \\ -{}^tU & V \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.*
Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. Montrer que P existe et est inversible.
Calculer AP. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = 2 + \mathrm{rg}({}^tUJ^{-1}U + V)$.

   (b) *Dans le cas général, montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.* a7-082

9. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'ordre p, $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$ et $F = Vect\left(f^{(k)}(a)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.*

   (a) *Prouver que $\left(f^{(k)}(a)\right)_{k\in \llbracket 0,p-1 \rrbracket}$ est une base de F.*

   (b) *Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(f^{(p-1)}(a)) \neq 0$; prouver que φ existe. Soit $H = \{x \in E / \forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi \circ f^k(x) = 0\}$; démontrer que H est un supplémentaire de F stable par f.*

(c) *Décrire la matrice de f dans une base adaptée à $F \oplus H$.*
Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ vérifie $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i+1$ et $a_{i,i+1} \in \{0,1\}$. A7-80

---

10. Soit $(X_i)_{1\leq i\leq p}$, p matrices de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{R})$ formant une famille libre, $(Y_j)_{1\leq j\leq q}$, q matrices de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{R})$ formant aussi une famille libre ; montrer que la famille des $({}^tY_jX_i)$ est une famille libre. *CCP* a7-103
11. Montrer que $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ admet une base formée de projecteurs. A7-076
12. Soit A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.
On suppose que $A + B = AQ(B)$.
    (a) Montrer que, si $Q(B) - I_n$ est inversible, alors A et B commutent.
    (b) Montrer que $\mathrm{rg}(AB - BA) + \mathrm{rg}(Q(B) - I_n) \leq n$.

    Mines a7-092
13. Soit P la matrice de passage de $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ vers $((X-1)^k)_{0\leq k\leq n}$; calculer P et P^{-1}. A7-74
14. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
    (a) Calculer les puissances successives de J.
    (b) Soit A l'espace vectoriel engendré par les puissances successives de A. Prouver que A est un anneau. Déterminer ses éléments inversibles.
    (c) On pose $K = I_3 - J + J^2$. Soit A_1 l'ensemble des matrices L carrées d'ordre 3 sur $\mathbb{C}$ telles que $KL = LK = L$. Prouver que A_1 est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Est-ce un anneau ? Est-ce un corps ? a7-4
15. Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre n et A une matrice symétrique de $\mathcal{A}$. Prouver que tout élément M de $\mathcal{A}$ peut s'écrire sous la forme $M = X + AY$, où X et Y sont des éléments de $\mathcal{A}$ et où $AX = 0$. Cette décomposition est-elle unique ? a7-6
16. Dans E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $f_1, f_2, ...f_n$ n endomorphismes nilpotents et deux à deux permutables.
Montrer que : $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ ... \circ f_n = 0$. A7-060
17. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id$.
    1. Montrer que, si $(x_1, .., x_p, f(x_1), .., f(x_{p-1}))$ est une famille libre, alors $(x_1, .., x_p, f(x_1), .., f(x_{p-1}), f(x_p))$ est aussi une famille libre de E.
    2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
    3. Montrer qu'il existe un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id$ si et seulement si n est pair.

    Centrale a7-088
18. Trouver les matrices A, carrées d'ordre n, telles que A^2 ait une diagonale de 1 au-dessus de la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. *Mines* a7-091