# Réponses et Indications (Polynômes)

## Exercice 1

1) $P(X)=(X-1)^2(X-2)$.
2) $R(X)=(2^n-n-1)X^2+(3n+2-2^{n+1})X+2^n-2n$. Par division euclidienne, on sait que $d°R\leq 2$. Ecrire $X^n=P(X)Q(X)+R(X)$ en 1 et 2 , ainsi que la dérivée.

## Exercice 2

Soit un entier $n\geq 2$ et $\omega=e^{2i\pi/n}$. Soit $P$ le polynôme : $P(X)=X^{n-1}+X^{n-2}+...+X+1$.

1) $P(X)=\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega^k)$ car les racines de $P$ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sauf 1.
2) $u_n=n$. Utiliser ensuite $1-\omega^k=-2i\,e^{ik\pi/n}\sin\dfrac{k\pi}{n}$.
3) $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)=\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$ par changement d'indice. Donc $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

## Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n(X)=(X+1)^n-(X-1)^n$.

1) $d°P_n=n-1$ et son coefficient dominant est $2n$.
2) $P_n(X)=2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X+i\,\text{cotan}\dfrac{k\pi}{n}\right)$. Pour les racines, se ramener à : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n=1$.
3) $P(X)=4X(X^2+3)(3X^2+1)$. Factoriser d'abord dans $\mathbb{C}[X]$.

## Exercice 4 (EM Lyon 2005 voie S)

1) $T_2(X)=4X^2-1$ et $T_3(X)=8X^3-4X$.
2) $d°T_n=n$ et le coefficient dominant est $2^n$. Faire une récurrence double sur $T_n$ et $T_{n+1}$.
3) Montrer que $T_n$ a la même parité que $n$ par récurrence double.
4) $T_n(1)=n+1$. Faire une récurrence double.
5) Toujours par récurrence double !
6) $T_n$ admet $n$ racines réelles distinctes : $\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.
7) $T_n(X)=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.
8) $\prod_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{2(n+1)}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n}$. Utiliser $T(1)$ et les formules de trigonométrie.
9) D'après 5) : $\forall\theta\in]0,\pi[\quad \sin\theta T_n(\cos\theta)-\sin(n+1)\theta=0$, donc ses dérivées sont nulles.
10) Le polynôme admet pour racines tout réel de $]-1,1[$, donc est nul.

## Exercice 5 (INSEEC 2002)

1) Supposer qu'il existe $P_n$ et $Q_n$, et montrer que $P_n-Q_n$ a une infinité de racines en étudiant la fonction $t\mapsto t+\dfrac{1}{t}$.
2) $P_0(X)=2$, $P_1(X)=X$ et $P_2(X)=X^2-2$.
3) Raisonner par récurrence double.
4) $d°P_n=n$, le coefficient dominant est 1 et $P_n$ a même parité que $n$. Récurrence double.
5) $P_5(X)=X^5-5X^3+5X$.

$$P_5(X) = X\left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right).$$

6) $t^n + \dfrac{1}{t^n} = 0$ a pour solutions $e^{i(2k+1)\pi/2n}$ pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. Donc $P_n$ a $n$ racines distinctes $2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $P_n(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

7) $\cos\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

## Exercice 6

1) $d°Q = p$ et son coefficient dominant est $-(p+1)a$.

2) a) $d°P = n$ et son coefficient dominant est $-\dfrac{1}{n+1}$. Utiliser $Q(X) = X^n$.

b) $P(X) = -\dfrac{1}{n+1}(1 + X + ... + X^n)$. Unicité des coefficients de $Q(X)$.

c) Dériver $k$ fois la relation ($E$) par la formule de Leibniz.

d) Utiliser la formule de Taylor en 1 et la question c).

e) $S = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ car $S = P(2)$.

## Exercice 7

1) Par récurrence : $P_1(X) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P'_n(X) - 2nXP_n(X)$.

2) Par récurrence : $d°P_n = n-1$ et son coefficient dominant est $(-1)^n n!$.

3) Exprimer le sinus et le cosinus en fonction de la tangente.

4) Faire une récurrence et utiliser les formules de trigonométrie.

5) $P_n$ a $(n-1)$ racines distinctes $-\text{cotan}\dfrac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

## Exercice 8 (Mines 2003)

### Partie A : Etude de la fonction *f*

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Branche parabolique de direction $Oy$.

3) $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$. Point d'inflexion en 1.

4) $f''(x) = \dfrac{(x-1)(x^3-3x^2+5x+1)e^x}{(x^2+1)^3}$. Poser $\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

5) La première est 1. Utiliser le théorème de bijection pour justifier l'unique solution $\alpha$ de $\varphi(x) = 0$. Le sens de variations de $\varphi$ donne l'encadrement.

### Partie B : Etude des dérivées successives de *f*

1) Par récurrence : $P_0(X) = 1$ et $P_{n+1}(X) = (X^2+1)P'_n(X) + [X^2 - 2(n+1)X + 1]P_n(X)$.

2) $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X^2 - 2X + 1$ et $P_2(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 4X - 1$.

4) Raisonner par récurrence.

5) Par récurrence : $d°P_n = 2n$ et son coefficient dominant est 1.

6) $c_n = (-2i)^n n!$ et $d_n = (2i)^n n!$. Exprimer $c_{n+1}$ en fonction de $c_n$, et $d_{n+1}$ en fonction de $d_n$.

7) $R_{2p}(X) = (-4)^p (2p)!$ et $R_{2p+1}(X) = -2(-4)^p(2p+1)!X$ pour tout entier $p$.

**Exercice 9 (d'après ESLSCA 1994)**

1) Par récurrence : $P_0(X)=1$ et $P_{n+1}(X)=(1-X)P'_n(X)+(n+2-X)P_n(X)$.
3) $P_0(X)=1$, $P_1(X)=2-X$ et $P_2(X)=X^2-4X+5$.
4) Le terme de plus haut degré de $P_n$ est $(-1)^n X^n$. Faire une récurrence.
5) $P_n(1)=n!$.
6) Evident car $f'(x)=\dfrac{(2-x)e^x}{(1-x)^2}$.
7) Utiliser la formule de Leibniz.
8) $P_{n+2}(X)=(n+3-X)P_{n+1}(X)-(n+1)(1-X)P_n(X)$.
9) Utiliser le 2) et le 8).
10) Déduire du 9) que $P_{n+1}^{(k)}(X)=-(n+1)P_n^{(k-1)}(X)$ si $k\geq 1$ et faire une récurrence.
11) Utiliser la formule de Taylor.

**Exercice 10**

1) Opérations sur des fonctions de classe $C^\infty$.
2) Par récurrence : $P_0(X)=1$ et $P_{n+1}(X)=X^2P'_n(X)+[1-2(n+1)X]P_n(X)$.
3) $P_0(X)=1$, $P_1(X)=1-2X$, $P_2(X)=6X^2-6X+1$ et $P_3(X)=-24X^3+36X^2-12X+1$.
4) Par récurrence : $d°P_n=n$, son coefficient dominant est $(-1)^n(n+1)!$ et son terme constant est 1.

**Exercice 11 (d'après Ecricome 2004 voie S)**

1) Par récurrence : $P_0(X)=1$ et $P_{n+1}(X)=(1-X^2)P'_n(X)+(n+1)XP_n(X)$.
2) $P_0(X)=1$, $P_1(X)=X$, $P_2(X)=X^2+1$ et $P_3(X)=X^3+5X$.
3) Par récurrence : $d°P_n=n$ et son coefficient dominant est 1.

**Exercice 12 (d'après ESLSCA 86 ou 93)**

**Partie A**

1) Par récurrence sur *k* : $Q_0(X)=1$ et $Q_{k+1}(X)=(X^2-1)Q'_k(X)+2(n-k)XQ_k(X)$.
2) Utiliser le théorème de Rolle.
3) Faire une récurrence sur *k* pour les racines de $Q_k$.

   $P_n^{(k)}$ a deux racines $(-1)$ et 1 d'ordre $(n-k)$, et *k* racines simples dans $]-1,1[$.

**Partie B**

1) $L_0(X)=1$, $L_1(X)=X$, $L_2(X)=\dfrac{3}{2}X^2-\dfrac{1}{2}$ et $L_3(X)=\dfrac{5}{2}X^3-\dfrac{3}{2}X$.
2) $d°L_n=n$ et son coefficient dominant est $\dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}$ car $L_n(X)=\dfrac{1}{2^n n!}Q_n(X)$.
3) Utiliser la formule de Leibniz pour dériver *n* fois $P_n(X)=(X-1)^n(X+1)^n$.
4) Comparer le coefficient dominant de $L_n$ dans les deux expressions.
5) Montrer que $L_n(-X)=(-1)^nL_n(X)$ en utilisant le 3).
6) Utiliser la formule de Leibniz, puis $P_n^{(n)}(X)=2^n n! L_n(X)$ et ses dérivées.

**Partie C**

1) Même méthode qu'en B 6).
2) A l'aide de la formule de Leibniz, dériver $(n-1)$ fois la première expression et *n* fois la deuxième. On obtient : $P_n^{(n)}(X)=2nXP_{n-1}^{(n-1)}(X)+2n(n-1)P_{n-1}^{(n-2)}(X)$ et $P_n^{(n)}(X)=(X^2-1)P_{n-1}^{(n)}(X)+2nXP_{n-1}^{(n-1)}(X)+n(n-1)P_{n-1}^{(n-2)}(X)$.

3) Utiliser le 2) pour montrer que $P_n^{(n)}(X) = 2(X^2-1)P_{n-1}^{(n)}(X) + 2nXP_{n-1}^{(n-1)}(X)$, puis revenir à $L_n$ et utiliser le 1).
4) Utiliser 3) et 1).

**Exercice 13**

**Partie A : Etude de cas particuliers**

1) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.
2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.
3) $A(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$ et $B(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$.
4) $A^2(X) - 1 = (X^2-1)[4X(2X^2-1)]^2$.
   $B^2(X) - 1 = (X^2-1)[(4X^2+2X-1)(4X^2-2X-1)]^2$.
5) $C$ existe et $C = B$. Faire un changement de variable $\theta$ en $\dfrac{\pi}{2} - \theta$.
6) $D$ n'existe pas. Faire un changement de variable $\theta$ en $\pi - \theta$ pour le montrer.

**Partie B : Etude du cas général**

1) Même argument pour les deux : $P - Q$ aurait une infinité de racines, donc serait nul.
2) Unicité déjà vue. Faire une récurrence double pour montrer l'existence.
   $P_1(X) = X$ , $P_2(X) = 2X^2 - 1$ et $P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - P_{n-1}(X)$.
   $P_3(X) = 4X^3 - 3X$ , $P_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$ et $P_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$.
3) $d°P_n = n$, son coefficient dominant est $2^{n-1}$, son terme de plus bas degré est $(-1)^{n/2}$ si $n$ est pair et $(-1)^{(n-1)/2}nX$ si $n$ est impair. Faire une récurrence double.
4) Faire une récurrence double.
5) Si $Q$ existait, montrer par changement de variable $\theta$ en $\pi - \theta$ que $\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \sin n\theta = 0$.
6) Utiliser le 2) et le changement de variable $\theta$ en $\dfrac{\pi}{2} - \theta$.

**Partie C : Etude des racines**

1) $P_n$ admet $n$ racines distinctes : $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
2) $Q_n$ a les mêmes racines que $P_n$ d'après B 7).
3) Par récurrence : $S_1(X) = 1$ et $S_{n+1}(X) = XS_n(X) + P_n(X)$.
4) $P_n^{\,2}(X) - 1 = (X^2-1)S_n^2(X)$. Ecrire $\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$.
5) $\lambda_n = n$. Dériver $\cos n\theta = P_n(\cos\theta)$.