POLYNOMES

Exercice 1

1) Factoriser le polynôme : $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.
2) Soit un entier $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P(X)$.

Exercice 2

Soit un entier $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Soit P le polynôme : $P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$.

1) Déterminer les racines de P et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire le calcul de $u_n = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)$, puis montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
3) Comparer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ et $\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ en fonction de n.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1) Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.
2) Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation du polynôme P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
3) En déduire la factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme : $P(X) = (X+1)^6 - (X-1)^6$.

Exercice 4 (EM Lyon 2005 voie S)

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 2X$ et, pour tout entier naturel n : $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

1) Déterminer les polynômes T_2 et T_3.
2) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, T_n est un polynôme de degré *n* dont on déterminera le coefficient dominant.
3) Montrer que, si n est un entier pair (respectivement impair), alors T_n est un polynôme pair (respectivement impair).
4) Pour tout entier naturel *n*, calculer $T_n(1)$ en fonction de *n*.
5) Montrer que, pour tout entier *n* et tout réel $\theta \in]0,\pi[$: $T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
6) En déduire que, pour tout entier naturel non nul *n*, T_n admet *n* racines réelles, toutes situées dans $]-1,1[$, que l'on explicitera.
7) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la factorisation du polynôme T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
8) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de *n*.
9) Démontrer, pour tout entier naturel *n* et tout réel $\theta \in]0,\pi[$:
$$\sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)T_n(\cos\theta) = 0$$
Indication : On pourra dériver deux fois la fonction : $\theta \mapsto \sin\theta T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta$.
10) En déduire, pour tout entier naturel *n* : $(X^2-1)T_n''(X) + 3XT_n'(X) - (n^2+2n)T_n(X) = 0$.

Exercice 5 (INSEEC 2002)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n qui vérifient : $\forall t \in \mathbb{C}^* \quad P_n\left(t+\dfrac{1}{t}\right) = t^n + \dfrac{1}{t^n}$.

1) Montrer que si P_n existe, il est unique.
2) Déterminer P_0 et P_1. Puis en développant $\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2$, déterminer P_2.
3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n existe et que : $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.
4) Déterminer le degré de P_n, son coefficient dominant et sa parité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5) Calculer P_5 et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.
6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $t^n + \dfrac{1}{t^n} = 0$. En déduire les racines du polynôme P_n et sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
7) En comparant avec le 5), donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{10}$ et $\sin\dfrac{\pi}{10}$.

Exercice 6

Cet exercice utilise les formules de Taylor et de Leibniz.

1) Si P est un polynôme de degré p et de coefficient dominant a, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $Q(X) = (1-X)P'(X) - P(X)$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme qui vérifie (E) : $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$.
   a) Déterminer, en fonction de n, le degré et le coefficient dominant du polynôme P.
   b) Déterminer tous les coefficients du polynôme P.
   c) Déduire de (E) : $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad (1-X)P^{(k+1)}(X) - (k+1)P^{(k)}(X) = k!\dbinom{n}{k}X^{n-k}$.
   d) En déduire que : $P(X) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}(X-1)^k$.
   e) En déduire le calcul de la somme : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 7

1) Démontrer que la fonction Arctangente est de classe C^∞ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1}(X) = (1+X^2)P'_n(X) - 2nXP_n(X)$. En déduire le coefficient dominant de P_n et son degré.
3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\text{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\text{Arctan}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
4) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!\sin\left[n\left(\text{Arctan}\, x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^n}$.
5) En déduire les racines du polynôme P_n.

Exercice 8 (Mines 2003)

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative.

Partie A : Etude de la fonction f

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter géométriquement.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) Etudier les variations de f et donner l'allure de la courbe (C).
4) Justifier la dérivabilité de f' et calculer sa dérivée f''.
5) Montrer que l'équation $f''(x) = 0$ a deux solutions : l'une est évidente et l'autre sera notée α. Montrer que : $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.

Partie B : Etude des dérivées successives de f

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)e^x}{(x^2+1)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ désigne la $n^{\text{ème}}$ dérivée de f.
2) Préciser les polynômes P_0, P_1 et P_2.
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(X) = (X^2+1)P'_n(X) + [X^2 - 2(n+1)X + 1]P_n(X)$.
4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
5) Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant en fonction de n.
6) Calculer $c_n = P_n(i)$ et $d_n = P_n(-i)$.
7) En déduire le reste R_n de la division de P_n par X^2+1.

Exercice 9 (d'après ESLSCA 1994)

Cet exercice utilise les formules de Taylor et de Leibniz.

On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1) Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in D \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$.
2) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(X) = (1-X)P'_n(X) + (n+2-X)P_n(X)$.
3) Donner les expressions de P_0, P_1 et P_2.
4) Déterminer le terme de plus haut degré de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) Calculer $P_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6) Démontrer que : $\forall x \in D \quad (x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0$.
7) En dérivant $(n+1)$ fois cette relation, déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad (x-1)f^{(n+2)}(x) + (n+3-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = 0$$
8) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2}.
9) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P'_{n+1}(X) = -(n+1)P_n(X)$.
10) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [\![0,n]\!] \quad P_n^{(k)}(1) = (-1)^k n!$.
11) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(X) = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1-X)^k$.

Exercice 10

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x}$.

1) Démontrer que la fonction *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-1/x}$. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.
3) Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.
4) Calculer le degré du polynôme P_n, son coefficient dominant et son terme constant en fonction de *n*.

Exercice 11 (d'après Ecricome 2004 voie S)

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

1) Montrer que la fonction *f* est de classe C^∞ sur l'intervalle *I* et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1} x}$. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.
2) Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.
3) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré et le coefficient dominant de P_n.

Exercice 12 (d'après ESLSCA 86 ou 93)

Cet exercice utilise le théorème de Rolle et la formule de Leibniz.

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme défini par : $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$.

1) Si $n \geq 1$, démontrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un polynôme Q_k de degré *k* tel que : $P_n^{(k)}(X) = (X^2 - 1)^{n-k} Q_k(X)$.
2) Démontrer que si un polynôme admet deux racines réelles distinctes α et β (avec $\alpha < \beta$), alors sa dérivée admet au moins une racine dans $]\alpha, \beta[$.
3) En déduire que, si $n \geq 2$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le polynôme Q_k admet *k* racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$. En déduire le nombre de racines réelles de $P_n^{(k)}$ et leur ordre de multiplicité.

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme L_n par : $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}(X)$.

1) Calculer les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.
2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, L_n est un polynôme de degré *n* qui admet *n* racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$ et calculer son coefficient dominant.
3) En remarquant que $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ et, en appliquant la formule de Leibniz, démontrer que : $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\right]^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$.
4) En comparant les deux expressions de L_n, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\right]^2 = \binom{2n}{n}$.
5) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n a la même parité que *n*.

6) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (X^2-1)P'_n(X) = 2nXP_n(X)$. En dérivant $(n+1)$ fois cette relation avec la formule de Leibniz, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (X^2-1)L''_n(X) + 2XL'_n(X) - n(n+1)L_n(X) = 0$$

Partie C

1) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P'_n(X) = 2nXP_{n-1}(X)$. En dérivant n fois cette relation, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad L'_n(X) = XL'_{n-1}(X) + nL_{n-1}(X)$.
2) En utilisant les deux relations $P'_n(X) = 2nXP_{n-1}(X)$ et $P_n(X) = (X^2-1)P_{n-1}(X)$, donner deux expressions de $P_n^{(n)}(X)$.
3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad nL_n(X) = XL'_n(X) - L'_{n-1}(X)$.
4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)L_{n+1}(X) = (2n+1)XL_n(X) - nL_{n-1}(X)$.

Exercice 13

Partie A : Etude de cas particuliers

1) Rappeler l'expression de $\cos 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$.
2) Exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$.
3) Montrer qu'il existe deux polynômes $A(X)$ et $B(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ (que l'on déterminera) tels que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos 4\theta = A(\cos\theta)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos 5\theta = B(\cos\theta)$.
4) Montrer que les polynômes $A^2(X)-1$ et $B^2(X)-1$ sont divisibles par X^2-1 et que leurs quotients dans cette division sont des carrés de polynômes.
5) Existe-t-il un polynôme C de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin 5\theta = C(\sin\theta)$?
6) Existe-t-il un polynôme D de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin 4\theta = D(\sin\theta)$?

Partie B : Etude du cas général

1) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que :
   a) Si $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P(\cos\theta) = Q(\cos\theta)$, alors $P = Q$.
   b) Si $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P(\sin\theta) = Q(\sin\theta)$, alors $P = Q$.
2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos n\theta = P_n(\cos\theta)$. Préciser P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.
3) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - P_{n-1}(X)$.
4) Déterminer le degré de P_n, son coefficient dominant et son terme de plus bas degré.
5) Montrer que P_n a la même parité que n.
6) Montrer que si n est un entier pair et non nul, il n'existe pas de polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin n\theta = Q(\sin\theta)$.
7) Montrer que si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin n\theta = Q_n(\sin\theta)$, et démontrer que : $Q_n(X) = (-1)^p P_n(X)$.

Partie C : Etude des racines

1) Déterminer les racines de P_n comprises entre -1 et 1. Que peut-on dire des autres ?
2) Déterminer les racines de Q_n lorsque n est impair.
3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme S_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin n\theta = \sin\theta\, S_n(\cos\theta)$.
4) Déduire de la question précédente que $P_n^2(X)-1$ est divisible par X^2-1 et que le quotient de cette division est le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
5) Montrer qu'il existe un réel λ_n tel que $P'_n = \lambda_n S_n$. Déterminer λ_n en fonction de n.