Réponses et Indications (Nombres Complexes)

Exercice 1

1) La racine imaginaire pure est $(-3i)$. Chercher la racine sous la forme iy avec y réel, et séparer les parties réelles et imaginaires.
2) $S = \{-3i, -1+2i, 3-i\}$. Factoriser par $(z+3i)$ et résoudre l'équation : $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$ de discriminant $\Delta = 7 - 24i = (4-3i)^2$.

Exercice 2

Chercher successivement la racine réelle et la racine imaginaire pure, toujours en séparant les parties réelles et imaginaires, puis factoriser.

$$S_1 = \left\{-\frac{1}{2},\, 3i,\, 1-2i,\, 2-i\right\} \qquad S_2 = \{-2,\, -i,\, -1-i,\, 1+2i\}$$

Exercice 3

1) $S_1 = \{1-2i,\, 3-i\}$ car $\Delta = 8 - 6i = (3-i)^2$.
2) $S_2 = \left\{\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) / \, k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$. Se ramener à : $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$.
3) $S_3 = \left\{e^{i\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)} / \, k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \cup \left\{e^{i\left(-\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)} / \, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$. Poser $Z = z^n$.

Exercice 4

1) $S = \dfrac{-1 + (n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}$ car S est la dérivée de la partie imaginaire de $f(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} e^{inx/2}$.
2) $S = \dfrac{\sin nx}{\sin x \cos^{n-1} x}$ car S est la partie réelle de $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k$.

Exercice 5

1) α et β sont réels car $\frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$.
2) Ecrire que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle.
3) $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice 6

1) $\omega = 2\sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$. Donc $S = \left\{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}, \sqrt{2}\, e^{11i\pi/12}, \sqrt{2}\, e^{19i\pi/12}\right\}$. Et $(1+i)^3 = \omega$. Donc $S = \left\{1+i, -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}$, $\cos\dfrac{11\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.
2) u et v existent car ils sont solutions de $Z^2 - zZ + 2 = 0$. Et $u^3 + v^3 = -4$ et $u^3 v^3 = 8$. Donc u^3 et v^3 sont solutions de $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ de racines ω et $\overline{\omega}$.
   Donc $S = \{2, -\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1\}$ en résolvant $u^3 = \omega$ et $v = \dfrac{2}{u}$, puis $z = u + v$.

Exercice 7

1) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2) u et v existent car sont solutions de $Z^2-zZ+\frac{1}{4}=0$. Et $u^3+v^3=\frac{\sqrt{2}}{8}$ et $u^3v^3=\frac{1}{64}$.

Donc u^3 est solution de $Z^2-\frac{\sqrt{2}}{8}Z+\frac{1}{64}=0$ de racines $\frac{\sqrt{2}}{16}(1+i)$ et $\frac{\sqrt{2}}{16}(1-i)$.

Donc $S=\left\{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right\}$.

Exercice 8

Pour les deux questions, raisonner par double implication et utiliser la somme et le produit des racines $z_1=r_1e^{i\alpha_1}$ et $z_2=r_2e^{i\alpha_2}$: $p=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ et $q=z_1z_2$.

Dans les réciproques, exprimer z_1 et z_2 en fonction de $\lambda=\frac{q}{p^2}$.

Exercice 9 (d'après ESCP 1998 voie S)

Partie A : Etude réelle

1) f est décroissante sur $]0,\sqrt{2}[$, croissante sur $]\sqrt{2},+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
2) Seul point fixe de f : $\sqrt{2}$.
3) La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$. Utiliser le théorème de convergence monotone, puis le théorème du point fixe. Pour la récurrence, utiliser le sens de variations de f.

Partie B : Etude complexe

1) $b=1+i$.
2) Utiliser $\frac{1}{w}=\frac{\overline{w}}{|w|^2}$.
3) Utiliser le 2) en remarquant que $\frac{F(z)}{b}=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$ où $w=\frac{z}{b}$.
4) La suite (w_n) est bien définie car $-b\notin P^+$. On a $w_{n+1}=(w_n)^2$, donc $w_n=w_0^{2^n}$.

$|w_0|=\frac{1}{\sqrt{5}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|w_n|=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$. Or $z_n=b\frac{1+w_n}{1-w_n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=b$.