NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(1-i)z^2 + (2+i)z - 21 - 3i = 0$.

1) Démontrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure.
2) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes sachant qu'elles admettent une racine réelle et une racine imaginaire pure :

1) $2z^4 - 5z^3 + (15+8i)z^2 - (21-4i)z - 15 = 0$.
2) $z^4 + 2z^3 + (2+3i)z^2 + (1+7i)z - 6 + 2i = 0$

Exercice 3

Soit un entier $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(1-i)z^2 - (1-7i)z - 6 - 8i = 0$.
2) $(z-i)^n = (z+i)^n$.
3) $z^{2n} - 2z^n \cos(n\alpha) + 1 = 0$.

Exercice 4

1) Soit x un réel tel que : $x \not\equiv 0 \quad (2\pi)$. Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^{n} k \cos kx$.
2) Soit x un réel tel que : $x \not\equiv 0 \quad \left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\cos kx}{(\cos x)^k}$.

Exercice 5

1) Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Montrer que $\alpha = \omega + \dfrac{1}{\omega}$ et $\beta = \omega^2 + \dfrac{1}{\omega^2}$ sont réels.
2) Montrer que α et β sont solutions de l'équation : $x^2 + x - 1 = 0$.
3) En déduire α, puis $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice 6

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 6z + 4 = 0$.

1) On pose : $\omega = -2 + 2i$.
   a) Mettre ω sous forme trigonométrique.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \omega$. Donner les solutions sous forme trigonométrique.
   c) Calculer $(1+i)^3$. En déduire la forme algébrique des solutions de $z^3 = \omega$.
   d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.
2) Soit z une solution de l'équation (E).
   a) Montrer qu'il existe deux complexes u et v (que l'on ne demande pas de calculer) tels que : $u + v = z$ et $uv = 2$.
   b) Calculer $u^3 + v^3$ et u^3v^3 en fonction de z.
   c) En déduire que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré.
   d) Résoudre cette équation.
   e) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 7

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $8z^3 - 6z - \sqrt{2} = 0$ qui n'a pas de racine évidente.

1) Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2) Soit z une solution de l'équation (E).
   a) Montrer qu'il existe deux nombres complexes u et v (que l'on ne demande pas de calculer) tels que : $u + v = z$ et $uv = \frac{1}{4}$.
   b) Calculer $u^3 + v^3$ et en déduire que u^3 est solution d'une équation du second degré que l'on résoudra.
   c) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 8

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2pz + q = 0$, où p et q sont deux nombres complexes donnés avec $q \neq 0$.

1) Montrer que les solutions de (E) ont même argument si et seulement si $\frac{q}{p^2} \in]0,1]$.
2) Montrer que les solutions de (E) ont même module si et seulement si $\frac{p^2}{q} \in [0,1]$.

Exercice 9 (d'après ESCP 1998 voie S)

Partie A : Etude réelle

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

1) Etudier les variations de f et ses limites.
2) Résoudre l'équation : $f(x) = x$.
3) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) Quelle est sa limite ?

Partie B : Etude complexe

Soit F l'application qui à tout complexe $z \neq 0$ associe le complexe : $F(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{2i}{z}\right)$.

1) Montrer qu'il existe un unique complexe b tel que $\mathrm{Re}(b) > 0$ et $b^2 = 2i$.
2) Démontrer que : $\forall w \in \mathbb{C}^* \quad \mathrm{Re}(w) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{w}\right) > 0$.
3) On note $P^+ = \left\{ z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) > 0 \right\}$. Démontrer que : $\forall z \in P^+ \quad F(z) \in P^+$.
4) On considère la suite définie par : $z_0 = 2i$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = F(z_n)$.
   a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n \in P^+$.
   b) En déduire que la suite de terme général $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$ est bien définie.
   c) Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n, puis en déduire l'expression de w_n en fonction de w_0 et n.
   d) Démontrer que : $|w_0| < 1$. En déduire la limite de $|w_n|$ quand n tend vers $+\infty$.
   e) Exprimer z_n en fonction de w_n. En déduire la limite de z_n quand n tend vers $+\infty$.