NOMBRES REELS

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|x+2| = 3x+4-|x|$

2) $\sqrt{x^2-6x+5} \geq x-4$.

Exercice 2

Soit (E) l'équation : $x^4-2x^3-22x^2-2x+1=0$.

On remarquera que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

1) Pour tout $x \neq 0$, on pose $X = x+\dfrac{1}{x}$. Montrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si X vérifie une équation du second degré que l'on précisera.

2) Résoudre cette équation et en déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 3

1) Montrer <u>sans calcul</u> que l'équation $5x^2+12x-7=0$ a deux racines réelles.

2) Sans calculer ces racines x_1 et x_2, calculer $y = \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ et $z = x_1^2+x_2^2$.

Exercice 4

Résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel m, les équations et inéquations suivantes d'inconnue x réelle :

1) $m(x-2) < x+1$.

2) $(m-6)x^2+(2m+3)x+(m+4)=0$.

Exercice 5

1) Si $n \in \mathbb{N}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $n = \text{Ent}(\sqrt{x})$.

2) Si $n \in \mathbb{N}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $n = \sqrt{\text{Ent}(x)}$.

3) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\sqrt{\text{Ent}(x)} = \text{Ent}(\sqrt{x})$.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}$, on considère la partie : $A = \left\{ \dfrac{n^2-1}{n^2+1} \;/\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

Montrer que la partie A est bornée, et calculer ses bornes inférieure et supérieure.

Exercice 7

Soient n et p deux entiers tels que $n \geq 2$ et $0 \leq p \leq n$.

1) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$. En déduire : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}\binom{n}{k}$.

2) Montrer que : $\forall k \in [\![0, p]\!] \quad \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k} = \dbinom{p}{k}\dbinom{n}{p}$. En déduire : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

3) Montrer que : $\forall k > p \quad \dbinom{k}{p} = \dbinom{k+1}{p+1} - \dbinom{k}{p+1}$. En déduire : $S_3 = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.