Réponses et Indications (Ensembles - Applications)

Exercice 1

Utiliser la distributivité, puis montrer une inclusion.

Exercice 2

1) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.
2) Utiliser le 1) pour chaque membre.

Exercice 3

1) $A * \emptyset = \overline{A}$, $A * E = \emptyset$, $A * A = \overline{A}$ et $A * \overline{A} = \emptyset$.
2) La loi * est commutative.
3) $(A * A) * (B * B) = A \cap B$ et $(A * B) * (A * B) = A \cup B$.
   Montrer que si la loi * était associative, ces deux ensembles seraient égaux.
4) Raisonner par double implication.

Exercice 4

1) $A * \emptyset = E$, $A * E = \overline{A}$, $A * A = \overline{A}$ et $A * \overline{A} = E$.
2) La loi * est commutative.
3) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$ et $(A * B) * (A * B) = A \cap B$.
   Montrer que si la loi * était associative, ces deux ensembles seraient égaux.
4) Raisonner par double implication.

Exercice 5

1) $A \Delta (A \Delta B) = B$.
2) f est bijective et $f^{-1} = f$. Utiliser le 1).

Exercice 6

1) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $D = \mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$.
   Elle est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$, strictement croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
2) Elle n'est ni injective ni surjective de D dans $\mathbb{R}$. Trouver des contre-exemples.
3) $f([0,2]) = \left[\dfrac{1}{\sqrt{7}}, 1\right]$. Utiliser le 1).
4) $f^{-1}([1,2]) = [-1,0]$. Résoudre l'inéquation $1 \leq f(x) \leq 2$.
5) $J = \left]0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$ et $f_{/I}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{4-3x^2}}{2x}$. Utiliser le théorème de bijection et résoudre l'équation $x = f(y)$ pour $y \in I$.