ENSEMBLES - APPLICATIONS

Exercice 1

Soient A, B et C trois parties d'un même ensemble E.
Démontrer que : $(A\cup C)\cap(B\cup\overline{C})=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap C)$.

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. On rappelle que $A-B=A\cap\overline{B}$.
1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que : $A\cap B=A$.
2) Démontrer que : $A-B=A\Leftrightarrow B-A=B$.

Exercice 3

Soit E un ensemble non vide. A toutes parties A et B de E, on associe la partie $A*B=\overline{A}\cap\overline{B}$ où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont les complémentaires de A et de B dans E. Dans ce qui suit, A, B et C sont des parties quelconques de E.
1) Déterminer $A*\varnothing$, $A*E$, $A*A$ et $A*\overline{A}$.
2) La loi * est-elle commutative ?
3) Déterminer $(A*A)*(B*B)$ et $(A*B)*(A*B)$.
   En déduire que la loi * n'est pas associative.
4) Démontrer que : $(A*B)*C=A*(B*C)\Leftrightarrow A=C$.

Exercice 4

Soit E un ensemble non vide. A toutes les parties A et B de E, on associe la partie $A*B=\overline{A}\cup\overline{B}$ où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont les complémentaires de A et de B dans E.
Dans ce qui suit, A, B et C sont des parties quelconques de E.
1) Déterminer $A*\varnothing$, $A*E$, $A*A$ et $A*\overline{A}$.
2) La loi $*$ est-elle commutative ?
3) Déterminer $(A*A)*(B*B)$ et $(A*B)*(A*B)$.
4) En déduire que la loi $*$ n'est pas associative.
5) Démontrer que : $(A*B)*C=A*(B*C)\Leftrightarrow A=C$.

Exercice 5

On rappelle que pour toutes parties A et B d'un ensemble E :

$$A\Delta B=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$$

1) Déterminer $A\Delta(A\Delta B)$.
2) Soit f l'application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ définie par : $f(X)=A\Delta X$.
   a) Montrer que f est injective.
   b) Montrer que f est surjective.
   c) En déduire qu'elle est bijective et préciser son application réciproque.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
1) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f et ses variations.
2) La fonction f est-elle injective ? surjective de D dans $\mathbb{R}$?
3) Déterminer l'image directe par f de $A=[0,2]$.
4) Déterminer l'image réciproque par f de $B=[1,2]$.
5) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ est bijective de I dans un intervalle J que l'on précisera. Déterminer son application réciproque.