1. **Prouver que $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}f(t)g(t)\ \ dt$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.**

   (0) : $\langle .,.\rangle$ est une application de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$:
   Soit $(f,g)\in(\mathbb{R}[X])^2$ et $h = t\mapsto\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}f(t)g(t)$. h est CM sur $[-1,1[$ de signe inconnu.
   fg est continue sur le compact $[-1,1]$ donc bornée en particulier sur $[-1,1[$ donc $|h(t)| = O_{t\to1}\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)$,
   $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\underset{t\to1}{\sim}\sqrt{\frac{2}{1-t}}$ et $t\mapsto(1-t)^{-1/2}$ est une fonction de référence intégrable sur $[-1,1[$, donc par comparaison, h l'est aussi.
   (1) : $\langle .,.\rangle$ est linéaire à droite.
   (2) : $\langle .,.\rangle$ est symétrique.
   (3) : Stricte positivité :
   Soit $f\in\mathbb{R}[X]$ et $l = t\mapsto\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}f^2(t)$.
   l est à valeurs positives dans $\langle f,f\rangle\geq0$.
   Supposons $\langle f,f\rangle = 0$. l est continue à valeurs positives donc $\forall t\in[-1,1[,\ l(t)=0$ et $\forall t\in]-1,1[,\ f(t)=0$.
   f est un polynôme et s'annule sur un ensemble infini donc $f=0$.

2. **Déterminer l'orthonormalisée par la méthode de Schmidt de $(1, X, X^2)$ dans $\mathbb{R}[X]$ muni de $((P,Q)\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-t}P(t)Q(t)\ \ \mathrm{d}t))$**

   Il s'agit bien d'un produit scalaire (cf.1.). Soit N la norme associée.
   Soit $e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = X^2$. On cherche (u_0,u_1,u_2) orthonormalisée de Schmidt.
   (On peut d'abord prouver que $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\ \mathrm{d}t = n!$, formule très utile dans la suite).
   $N(e_0) = \int_0^{+\infty}e^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$ donc $u_0 = e_0 = 1$.
   $(u_0,e_1) = \int_0^{+\infty}e^{-t}t\ \ \mathrm{d}t = 1$.
   Soit $u_1' = e_1-(u_0,e_1)u_0 = X-1$. $N(u_1') = 1$ donc $u_1 = X-1$.
   $(u_0,e_2) = \int_0^{+\infty}e^{-t}t^2\ \ \mathrm{d}t = 2$ et $(u_1,e_2) = \int_0^{+\infty}e^{-t}(t^3-t^2)\ \ \mathrm{d}t = 4$.
   Soit $u_2' = e_2-(u_0,e_2)u_0-(u_1,e_2)u_1 = X^2-4X+2$. $N(u_2') = 2$ donc $u_2 = \frac{X^2-4X+2}{2}$.

3. **Existence et calcul de $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(\exp(t)-at-b)^2\ \mathrm{d}t$.**

   On sait que $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ \ \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. Soit N la norme associée.
   $F = Vect(1, Id)$ est un sous-espace de dimension finie (2) de E et $\exp\in E$ donc $N(\exp - p_F^{\perp}(\exp)) = \min\limits_{f\in F}N(\exp - f)$.
   Le résultat demandé existe et est $(N(\exp - p_F^{\perp}(\exp)))^2$. Cherchons $p_F^{\perp}(\exp))^2 = h$.
   $h = t\mapsto at+b$ vérifie $(\exp - h\perp 1$ et $\exp - h\perp Id)$.

   $$\left\{\begin{array}{l}\langle\exp - h, 1\rangle = \int_0^1(\exp(t)-at-b)\ \mathrm{d}t = 0\\ \langle\exp - h, Id\rangle = \int_0^1(\exp(t)-at-b)t\ \mathrm{d}t = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}e-1-\frac{a}{2}-b = 0\\ 1-\frac{a}{3}-\frac{b}{2} = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}a = 18-6e\\ b = -10+4e\end{array}\right.$$

   d'où h.
   $(N(\exp - p_F^{\perp}(\exp))^2 = \langle\exp - h, \exp\rangle - \langle\exp - h, h\rangle = \langle\exp - h, \exp\rangle - 0 = -\frac{7e^2}{2}+20e-\frac{57}{2}$ $(\simeq 0,004)$.

4. **Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$.**
   Déterminer $\min\limits_f\left(\int_0^1(f"(t))^2\,dt\right)$ et les fonctions f pour lesquelles ce minimum est atteint.
   (On pourra intégrer par partie $\int_0^1 f"(t)(1-t)dt$) C6-092

$f" \in \mathcal{C}^0[0,1]$ et $(t \mapsto 1-t) \in \mathcal{C}^1[0,1]$ donc on peut intégrer par partie et il vient $\displaystyle\int_0^1 f"(t)(1-t)\ \mathrm{d}t = -a$
$f"$ et $(t \mapsto 1-t)$ sont sans $\mathcal{C}^0[0,1]$ donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(*)\quad a^2 = \left|\int_0^1 f"(t)(1-t)\ \mathrm{d}t\right|^2 \le \left(\int_0^1 (f")^2\right)\left(\int_0^1 (1-t^2)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}\int_0^1 (f")^2,$$

ie $\displaystyle\int_0^1 (f")^2 \ge 3a^2$, et c'est une égalité ssi $(f", t \mapsto 1-t)$ est une famille liée ; est-ce possible pour une fonction f ayant les propriétés demandées ?
$t \mapsto 1-t$ n'est pas la fonction nulle. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=a$.
$\forall t \in [0,1],\ f"(t) = \lambda(1-t) \iff f = t \mapsto \lambda\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6}\right) + at$ donc $(*)$ est une égalité ssi $f = t \mapsto \lambda\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6}\right) + at$ et $f(1) = \dfrac{\lambda}{3} + a = 0$, donc le minorant $3a^2$ est bien atteint pour $f = t \mapsto -3a\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6}\right) + at$ et il s'agit du minimum.

5. **Existence de la série de Fourier et calcul du terme général pour la fonction $f : (t \in [0,\pi] \mapsto \mathrm{ch}\, tx)$, f impaire et $2\pi-$périodique (x est une constante réelle).**

   La fonction f est $CM(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique donc admet une série de Fourier. f étant de plus impaire, le TG est : $u_n = t \mapsto b_n \sin nt$ pour $n \ge 1$ et $\forall n \ge 1,\ b_n = \dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t.$
   $b_n = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^\pi (e^{xt} + e^{-xt})e^{int}\ \mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\dfrac{(-1)^n e^{\pi x} - 1}{x + in} + \dfrac{(-1)^n e^{-\pi x} - 1}{-x + in}\right) = \dfrac{2\sinh \pi x}{\pi}\dfrac{(-1)^n n}{x^2 + n^2}.$

---

6. *Prouver que* $\left(f \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 f'^2 + f(0)f(1)\right)^{1/2}\right.$ *sur* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *est une norme euclidienne.*

   [Si $N(f) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 f'^2 = -f(0)f(1)$ or $(\displaystyle\int_0^1 f')^2 \le \int_0^1 f'^2$ (Cauchy-Schwarz) d'où $f(0) = f(1) = 0$ et $f = 0$]

7. *Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E \quad \|f(x)\| \le \|x\|$.*

   (a) *Démontrer que :* $E = \ker(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f - Id)$.

   (b) *Pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose :* $u_n(x) = \dfrac{1}{n}(x + f(x) + f^2(x) + ... + f^{n-1}(x))$ *; démontrer que la suite $(u_n(x))$ converge vers la projection orthogonale de x sur Ker$(f - Id)$.* B1-78

   [(a) : Si $f(x) = 0$ et $x = f(y) - y$, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \|f(tx+y)\|^2 \le \|tx+y\|^2$ ... donc $x = 0$; $x = x_1 + f(u) - u$ d'où $u_n = x_1 + f^n(u)/n - u/n$]

8. *Soit* $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *et* $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_{[0,1]} fg + f'g'$.

   (a) *Montrer que φ est un produit scalaire.*

   (b) *Soit $V = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E / f" = f\}$. Montrer que V et W sont des supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.*

   (c) *Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E / f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta\}$. Déterminer* $\displaystyle\inf_{f \in E_{\alpha\beta}} \int_{[0,1]} f^2 + f'^2$.

   b1-006

   [(b) :$p_W^\perp(f) = t \mapsto ae^t + be^{-t}$ avec $a = \dfrac{-1}{e^2-1}f(0) + \dfrac{e}{e^2-1}f(1)$ et $b = \dfrac{e^2}{e^2-1}f(0) - \dfrac{e}{e^2-1}f(1)$;
   (c) : soit $h = t \mapsto \alpha + (\beta - \alpha)t$, on cherche $\displaystyle\inf_{g \in V}\|h - g\|^2 = \|h - p_V^\perp(f)\|^2 = \|p_W^\perp(h)\|^2 = \dfrac{(\alpha - e\beta)^2 + (\alpha e - \beta)^2}{e^2 - 1}$]

9. On se donne une suite (a_n) bornée à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ et $E = \mathbb{R}[X]$.
   (a) A tout couple $(P,Q) \in E^2$, on associe la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{2^n}P(n)Q(n)$. Démontrer la convergence de cette série.
   (b) Démontrer que $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}P(n)Q(n)$ définit un produit scalaire sur E.
   (c) Si l'on avait seulement (a_n) à termes dans $\mathbb{R}_+$, à quelle condition $\langle P,Q\rangle$ définirait-il encore un produit scalaire ?
   (d) On suppose maintenant $\forall n\ a_n = 1$ et on désigne par N_1 la norme associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$. Est-elle équivalente à la norme N_2 définie par $N_2(P) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)|$? B1-97

   [(a) : $u_n = O(\dfrac{n^d}{2^n})$ pour un $d \in \mathbb{N}$; (c) : Si (a_n) est bornée, à termes dans $\mathbb{R}_+$ et a une infinité de termes non nuls ; (d) Non (Pour $P_k = X^k$, on a $N_2(P_k) = 1$ et $N_1(P_k) \geq 2^{k-1}$ pour tout k)]

10. Soit E un espace préhilbertien, soit n vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans E.
   On suppose que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \Rightarrow \|x_j - x_i\| \geq 2$ et que $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \|x_i\| \leq R$.
   Montrer que $R \geq \sqrt{2\dfrac{n-1}{n}}$. B1-91

   [$(x_i|x_j) \leq R^2 - 2$ puis $\|\displaystyle\sum_1^n x_i\|^2 \geq 0$ donne le résultat.]

11. Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ un système de vecteurs unitaires de E tels que :
   $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.
   Démontrer que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E.*Centrale* B1-68

   [$x = e_j$ prouve que la famille est orthogonale et $x - \displaystyle\sum_1^n (x|e_i)e_i$ est de norme nulle donc la famille est génératrice.]

12. Montrer que $(P|Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})dt$ munit $\mathbb{C}_n[X]$ d'une structure d'espace hermitien et que la base canonique est orthonormale.
   Soit A un polynôme non nul de coefficient dominant a. Montrer que $\sup\limits_{|z|=1} |A(z)| \geq |a|$. Quand a-t-on égalité ? *Mines* b1-058

   [Majorer et d'autre part calculer par Pythagore $(A|A)$.
   Egalité ssi A est un monôme.]

13. Soit l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
   On pose $H = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E / \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$. Déterminer la distance euclidienne de e_1 à H.
   Même question avec $H' = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E / \displaystyle\sum_{i=1}^n (-1)^i x_i = 0 \right\}$.*Centrale* b1-001

   [$\dfrac{\sqrt{n}}{n}$]

14. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni de $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_0^4 P(i)Q(i)$.
   Démontrer que E est un espace euclidien. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.
   On considère les points $A_i = (x_i, y_i)$ définis par : $A_0 = (0,1), A_1 = (1,2), A_2 = (2,1), A_3 = (3,2), A_4 = (4,4)$. Démontrer qu'il existe un polynôme P et un seul dans E tel que $\forall i \in [\![0,4]\!] \quad P(x_i) = y_i$. Déterminer la projection orthogonale P_1 de P sur $\mathbb{R}_2[X]$. Interpréter P_1. b1-24

   [$\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{X-2}{\sqrt{10}}, \dfrac{X^2-4X+2}{\sqrt{14}}$.
   $P_1(X) = \dfrac{3X^2}{7} - \dfrac{39X}{35} + \dfrac{54}{35}$.]

15. Démontrer que $(a_1 ... a_n) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n)^2 \, \mathrm{d}x$ admet un minimum atteint en un point unique. Valeur de ce minimum ? B1-099

    $[\dfrac{1}{(n+1)^2}]$

16. Existence de la série de Fourier et calcul du terme général pour les fonctions suivantes :
    (a) $f(x) = x(\pi - x)$ pour $0 < x < \pi$ et f est $\pi-$périodique.
    (b) $f(x) = \sin \alpha x$ pour $|x| < \pi$, α est une constante, $\alpha \notin \mathbb{N}$, f est $2\pi-$périodique.
    (c) $f(t) = \sup(a \sin \omega t, 0)$ avec $(a, \omega) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. d4-17/3/9/23

    [(a) : $-\dfrac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2k+1)t}{(2k+1)^3}$; (b) : $\dfrac{2(-1)^n}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin \alpha\pi \sin nx$; (c) : $\dfrac{a}{\pi} + \dfrac{a}{2} \sin \omega t - \dfrac{2a}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{4k^2 - 1} \cos 2k\omega t$.]