ESPACES VECTORIELS NORMES

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Espaces vectoriels normés

1) Norme

Définition : On appelle norme sur un espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1. $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$. (séparation)
2. $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in K \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$. (homogénéité)
3. $\forall (x, y) \in E^2 \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. (inégalité triangulaire)

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Exemples : La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$.
La norme euclidienne associée à un produit scalaire.

Remarque : On verra que toutes les normes ne sont pas associées à un produit scalaire.

Propriétés : $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
$\forall (x, y) \in E^2 \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x + y)$.

Démonstration :

- Pour montrer que $x = 0_E \Rightarrow N(x) = 0$, il suffit d'utiliser 2 pour $\lambda = 0$.
- $x = (x + y) + (-y)$ donc $N(x) \leq N(x + y) + N(y)$ car $N(-y) = N(y)$.
  $y = (x + y) + (-x)$ donc $N(y) \leq N(x + y) + N(x)$ car $N(-x) = N(x)$.
  Donc $N(x) - N(y) \leq N(x + y)$ et $N(y) - N(x) \leq N(x + y)$.
  Donc $\forall (x, y) \in E^2 \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x + y)$.

Définition : Dans un espace vectoriel normé, un vecteur x est unitaire si $N(x) = 1$.

Pour tout $x \neq 0_E$, il existe au moins deux vecteurs unitaires colinéaires à x : $\pm \dfrac{1}{N(x)} x$.

Définition : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, la restriction à F de la norme de E est une norme sur F, appelée norme induite.

Evident car les propriétés sont vraies pour tous les éléments de E, donc pour ceux de F.
La norme induite sur F sera notée comme la norme sur E.

Théorème : Si $E = \prod_{k=1}^{p} E_k$ est un produit d'espaces vectoriels E_k normés par la norme N_k, l'application N définie sur E par $N(x) = \underset{1 \leq k \leq p}{\text{Max}}\, N_k(x_k)$ si $x = (x_1, ..., x_p)$ est une norme sur E appelée norme produit.

Démonstration : C'est évidemment une application de E dans $\mathbb{R}^+$.

- $N(x) = 0$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad N_k(x_k) = 0$, donc si $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad x_k = 0_{E_k}$, donc si $x = 0_E$.
- Soit $\lambda \neq 0$: $N(\lambda x) = \underset{1 \leq k \leq p}{\text{Max}}\, N_k(\lambda x_k) = \underset{1 \leq k \leq p}{\text{Max}} |\lambda| N_k(x_k)$. Or $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad N_k(x_k) \leq N(x)$.

  Donc : $\forall x \in E \quad N(\lambda x) \leq |\lambda| N(x)$. Donc : $\forall x \in E \quad N\left(\dfrac{1}{\lambda} \lambda x\right) \leq \dfrac{1}{|\lambda|} N(\lambda x)$.

  Donc : $\forall x \in E \quad |\lambda| N(x) \leq N(\lambda x)$. Donc si $\lambda \neq 0$, on a $\forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

  Pour $\lambda = 0$, l'égalité est évidente. Donc : $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in K \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

- $N(x+y)=\underset{1\le k\le p}{\mathrm{Max}}\,N_k(x_k+y_k)$. Or $\forall k\in [\![1,p]\!]\quad N_k(x_k+y_k)\le N_k(x_k)+N_k(y_k)$.

  Donc $\forall k\in [\![1,p]\!]\quad N_k(x_k+y_k)\le N(x)+N(y)$. Donc $N(x+y)\le N(x)+N(y)$.

<u>Conséquence</u> : Sur K^n, l'application définie par $N(x)=\underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k|$ est une norme.

Mais il en existe d'autres comme par exemple la norme euclidienne $N(x)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}$.

On peut les comparer, ce qui permettra de comparer les propriétés associées.

<u>Définition</u> : Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que : $\forall x\in E\quad aN_1(x)\le N_2(x)\le bN_2(x)$.

On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence.

<u>Exemple</u> : Sur K^n, notons $N_1(x)=\underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k|$ et $N_2(x)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}$.

Le maximum des $|x_k|$ est atteint, donc $\underset{1\le k\le n}{\mathrm{Max}}|x_k|=|x_j|$ et $\forall k\in [\![1,n]\!]\quad |x_k|\le|x_j|$.

Donc : $|x_j|^2\le\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\le n|x_j|^2$. Donc $\forall x\in E\quad N_1(x)\le N_2(x)\le\sqrt{n}N_2(x)$.

Donc les deux normes sont équivalentes.

2) <u>Distance associée</u>

<u>Définition</u> : On appelle distance sur E associée à la norme N l'application définie par :

$$\forall (x,y)\in E^2\quad d(x,y)=N(x-y).$$

La définition est analogue à celle de la distance euclidienne.

<u>Propriétés</u> : $\forall (x,y)\in E^2\quad d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

$\forall (x,y)\in E^2\quad d(x,y)=d(y,x)$.

$\forall (x,y,z)\in E^3\quad d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$. (inégalité triangulaire)

- $d(x,y)=0$ si et seulement si $x-y=0_E$, donc si $x=y$.
- $\forall (x,y)\in E^2\quad d(y,x)=N(y-x)=N(x-y)=d(x,y)$.
- $\forall (x,y,z)\in E^3\quad d(x,z)=N(x-z)=N(x-y+y-z)\le N(x-y)+N(y-z)$.

  donc $\forall (x,y,z)\in E^3\quad d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

Si A est une partie non vide de E et si $x\in A$, alors $\{d(x,y)/\,y\in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$, donc minorée par 0. Donc elle possède une borne inférieure.

<u>Définition</u> : Si A est une partie non vide de E et si $x\in A$, on appelle distance de x à la partie A le réel : $d(x,A)=\mathrm{Inf}\{d(x,y)/\,y\in A\}$.

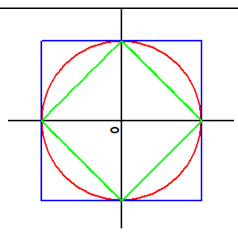
3) <u>Boules</u>

<u>Définition</u> : Soit $a\in E$ et un réel $r>0$:

- L'ensemble $B(a,r)=\{x\in E/\,\|x-a\|<r\}$ est appelé boule ouverte de centre a et de rayon r.
- L'ensemble $B_f(a,r)=\{x\in E/\,\|x-a\|\le r\}$ est appelé boule fermée de centre a et de rayon r.

<u>Exemple</u> : Si $E=\mathbb{R}^2$, représenter les boules $B(0,1)$ pour chacune des trois normes usuelles :

N_1 en vert, N_2 en rouge, N_∞ en bleu.



<u>Propriétés</u> :
a) L'intersection de deux boules $B(a,r_1)$ et $B(a,r_2)$ de même centre a est la boule $B(a,r)$ de centre a et de rayon $r = \mathrm{Min}(r_1,r_2)$.
b) Si $a_1 \neq a_2$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a_1,r) \cap B(a_2,r) = \varnothing$.
c) Pour tout point x d'une boule <u>ouverte</u> $B(a,r)$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ soit entièrement contenue dans $B(a,r)$.

<u>Démonstration</u> : La propriété a) est évidente.
Pour la propriété b), il suffit de prendre $r = \dfrac{1}{3}\|a_1 - a_2\|$.
En effet, pour tout point $x \in B(a_1,r)$ et tout point $y \in B(a_2,r)$, on a : $\|a_1 - a_2\| \leq \|a_1 - x\| + \|x - y\| + \|y - a_2\| \leq 2r + \|x - y\|$. Or $\|a_1 - a_2\| = 3r$.
Donc : $\|x - y\| \geq r > 0$. Donc $x \neq y$. Donc $B(a_1,r) \cap B(a_2,r) = \varnothing$.
Pour la propriété c), il suffit de prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{2}[r - \|a - x\|]$ (>0 car $\|a - x\| < r$). Pour tout $y \in B(x,\varepsilon)$, on a : $\|a - y\| \leq \|a - x\| + \|x - y\| < \|a - x\| + \varepsilon$.
Or $\|a - x\| = r - 2\varepsilon$. Donc : $\|a - y\| < r - \varepsilon < r$. Donc $y \in B(a,r)$.
<u>Remarque</u> : Cette propriété est fausse pour les boules fermées. En effet, si x appartient à la frontière de $B_f(a,r)$, c'est-à-dire si $\|a - x\| = r$, toute boule de centre x et de rayon ε contient des éléments extérieurs à $B(a,r)$, donc n'est pas contenue dans $B(A,r)$. En effet $y = x + \dfrac{\varepsilon}{2r}(x - a)$ appartient à $B(x,\varepsilon)$ car $\|y - x\| = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et n'appartient pas à $B(a,r)$ car $\|y - a\| = r + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

<u>Définition</u> : Une partie V de E est un voisinage d'un point $a \in E$ s'il existe une boule ouverte de centre a contenue dans V.

L'ensemble des voisinages de $a \in E$ est noté $\mathscr{V}(a)$. Il est stable par réunion et par intersection finie.

4) Parties bornées

<u>Définition</u> : Une partie D de E est bornée s'il existe un réel K tel que $\forall x \in D \quad \|x\| \leq K$.

Cela signifie qu'il existe une boule $B_f(O,K)$ contenant D. Il n'y a pas unicité de K, donc la boule peut être ouverte ou fermée.
Plus généralement, s'il existe une boule $B(a,r)$ telle que $D \subset B(a,r)$, alors pour tout point x de D, on a $\|x\| \leq \|a\| + \|x - a\|$, donc $\|x\| \leq \|a\| + r$.

<u>Théorème</u> : Une partie D de E est bornée si et seulement si il existe une boule contenant D.

<u>Exemples</u> : Les boules ouvertes ou fermées sont des parties bornées de E.
Tout segment $[A,B]$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne.

<u>Propriétés</u> :
a) L'intersection d'un nombre fini ou infini de parties bornées est une partie bornée.
b) La réunion d'un nombre <u>fini</u> de parties bornées est une partie bornée.

L'intersection est contenue dans n'importe quelle partie, donc dans une boule.
Si $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ et si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les parties D_i sont bornées, donc s'il existe $r_i > 0$ tel que $D_i \subset B(0_E,r_i)$, alors $D \subset B(0_E,r)$ avec $r = \mathrm{Max}(r_1,\ldots,r_n)$.

Théorème : Si D_1, ..., D_p sont des parties bornées des espaces vectoriels normés (E_1, N_1), ..., (E_p, N_p), alors $D = D_1 \times ... \times D_p$ est une partie bornée de $E = E_1 \times ... \times E_p$ muni de la norme produit.

Démonstration : Soit $x \in D$. Donc $x = (x_1, ..., x_p)$ et $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad x_k \in D_k$.

Or, quel que soit *k*, D_k est bornée, donc il existe $m_k > 0$ tel que $N_k(x_k) \leq m_k$.

Donc : $N(x) \leq \underset{1 \leq k \leq p}{\text{Max}}\, m_k$. Donc *D* est une partie bornée de *E*.

II - Normes usuelles

1) Normes usuelles sur K^n

Il existe 3 normes usuelles sur K^n. Si $x = (x_1, ..., x_n)$:

$$N_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \underset{1 \leq k \leq n}{\text{Max}} |x_k|$$

On a vu que N_2 et N_∞ sont des normes équivalentes : $\forall x \in E \quad N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{n} N_\infty(x)$.

N_1 est évidemment une application de *E* dans $\mathbb{R}^+$. Elle vérifie :

- $N_1(x) = 0$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad |x_k| = 0$, donc si $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k = 0$, donc si $x = 0_E$.
- $N_1(\lambda x) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda| N_1(x)$.
- $N_1(x + y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|$, donc $N_1(x + y) \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)$, donc $N_1(x + y) \leq N_1(x) + N_1(y)$.

Donc N_1 est aussi une norme sur K^n.

De plus : $\forall x \in E \quad N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq n N_\infty(x)$. Donc N_1 et N_∞ sont équivalentes.

Théorème : Les trois normes N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes.

Conséquence : On peut en déduire trois normes équivalentes dans tout espace vectoriel normé de dimension *n* car les calculs seront identiques.

2) Normes usuelles sur les polynômes

$K_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Donc avec la remarque précédente :

Il existe 3 normes usuelles équivalentes sur $K_n[X]$. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$N_1(P) = \|P\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad N_2(x) = \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \qquad N_\infty(x) = \|P\|_\infty = \underset{1 \leq k \leq n}{\text{Max}} |a_k|$$

Plus généralement, on peut définir des normes analogues sur $K[X]$.

Les polynômes peuvent s'écrire $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où la suite (a_k) est à support fini.

Il existe 3 normes usuelles sur $K[X]$. Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$:

$$N_1(P) = \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \qquad N_2(P) = \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2} \qquad N_\infty(P) = \|P\|_\infty = \underset{k \in \mathbb{N}}{\text{Max}} |a_k|$$

Elles ne sont pas équivalentes, mais : $\forall P \in K[X] \quad N_\infty(P) \leq N_2(P) \leq N_1(P)$.

N_1, N_2 et N_∞ sont des normes (démonstration analogue aux précédentes).

$\left(\underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Max}}|a_k|\right)^2 \le \sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|^2 \le \left(\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|\right)^2$ (sommes finies) donc $N_\infty(P) \le N_2(P) \le N_1(P)$.

Mais, si $P = 1 + X + ...X^n$, alors $N_1(P) = n+1$, $N_2(P) = \sqrt{n+1}$ et $N_\infty(P) = 1$. Donc $\dfrac{N_1}{N_\infty}$ et $\dfrac{N_2}{N_\infty}$ ne sont pas bornées. Donc les normes ne sont pas équivalentes.

3) Normes usuelles sur les matrices

On a bien sûr la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$: $N_2(A) = \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^t\overline{A}A)} = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2}$.

On considère $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ comme espace produit $[\mathcal{M}_{n,1}(K)]^p$ et on munit $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ de la norme $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|$, on obtient comme norme produit : $N_1(A) = \|A\|_1 = \underset{1\le j\le p}{\mathrm{Max}}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$.

On considère $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ comme espace produit $[\mathcal{M}_{1,p}(K)]^n$ et on munit $\mathcal{M}_{1,p}(K)$ de la norme $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{p}|x_k|$, on obtient comme norme produit : $N_\infty(A) = \|A\|_\infty = \underset{1\le i\le n}{\mathrm{Max}}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|$.

Il existe trois normes usuelles sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Si $A = (a_{i,j})$: $N_1(A) = \|A\|_1 = \underset{1\le j\le p}{\mathrm{Max}}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$

$$N_2(A) = \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^t\overline{A}A)} = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2} \qquad N_\infty(A) = \|A\|_\infty = \underset{1\le i\le n}{\mathrm{Max}}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|$$

Ces trois normes sont équivalentes.

En effet : $\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|^2\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|^2\right)$.

Donc $N_1(A) \le N_2(A) \le \sqrt{p}\ N_1(A)$ et $N_\infty(A) \le N_2(A) \le \sqrt{n}\ N_\infty(A)$.

4) Autres normes usuelles

Sur l'espace vectoriel $\ell^1(\mathbb{N}, K)$ des suites sommables : $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$.

Sur l'espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{N}, K)$ des suites de carré sommable : $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2}$.

Sur l'espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{N}, K)$ des suites bornées : $\|u\|_\infty == \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Max}}|u_n|$.

Ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Sur l'espace vectoriel $L^1(I, K)$ des fonctions continues et intégrables : $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$.

Sur l'espace vectoriel $L^2(I, K)$ des fonctions continues de carré intégrable : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}$.

Sur l'espace vectoriel $L^\infty(I, K)$ des fonctions bornées : $\|f\|_\infty = \underset{I}{\mathrm{Sup}}|f(t)|$.

Ces trois normes ne sont pas équivalentes.

III - Suites convergentes

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel muni d'une norme notée $\|\ \|$.

1) Définitions

Définition : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est convergente s'il existe un point $\ell \in E$ tel que : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \quad \|x_n - \ell\| \le \varepsilon$.

Supposons qu'il existe deux éléments distincts ℓ_1 et ℓ_2 qui conviennent. Soit $\varepsilon > 0$.

Donc $\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad \|x_n - \ell_1\| \leq \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad \|x_n - \ell_2\| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall n \geq \mathrm{Max}(n_1, n_2) \quad \|\ell_1 - \ell_2\| \leq \|\ell_1 - x_n\| + \|x_n - \ell_2\| \leq 2\varepsilon$.

Or ceci n'est pas possible, par exemple si $\varepsilon = \dfrac{1}{3}\|\ell_1 - \ell_2\|$.

Théorème : Si une suite (x_n) converge vers ℓ, alors ℓ est unique.

On parlera donc de la limite de la suite convergente et on note : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Définition : On appelle suite extraite de (x_n) toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Si une suite (x_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite converge vers ℓ.

Mais la convergence d'une suite extraite ne prouve pas la convergence de la suite.

Définition : Une suite (x_n) d'éléments de E est divergente si elle n'est pas convergente, donc si : $\forall \ell \in E \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad \|x_n - \ell\| > \varepsilon$.

Si deux suites extraites convergent vers deux limites distinctes, la suite diverge.

2) Propriétés

Théorème : Si une suite converge vers ℓ pour une norme, elle converge vers ℓ pour toute norme équivalente.

C'est évident car il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que $\forall x \in E \quad a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$.

Donc $\|x_n - \ell\|_1 \leq \dfrac{\varepsilon}{b} \Rightarrow \|x_n - \ell\|_2 \leq \varepsilon$ et $\|x_n - \ell\|_2 \leq a\varepsilon \Rightarrow \|x_n - \ell\|_1 \leq \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - \ell\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - \ell\|_2 = 0$.

Donc pour étudier une convergence, on peut choisir n'importe quelle norme équivalente.

Théorème : L'ensemble des suites convergentes de E est un espace vectoriel et l'application qui à toute suite convergente associe sa limite est linéaire.

Démonstration : Si (x_n) et (y_n) sont deux suites convergentes de limites ℓ et ℓ' et si $\lambda \in K - \{0\}$, on pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \lambda x_n + y_n$.

Pour tout $\varepsilon > 0$: $\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad \|x_n - \ell\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2|\lambda|}$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad \|y_n - \ell'\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n \geq \mathrm{Max}(n_1, n_2) \quad \|z_n - \lambda\ell - \ell'\| \leq |\lambda|\|x_n - \ell\| + \|y_n - \ell'\| \leq \varepsilon$.

La suite (z_n) converge vers $\lambda\ell + \ell'$.

Si $\lambda = 0$, la propriété est évidente.

Théorème : Toute suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n_0 \quad \forall q \geq n_0 \quad \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Si la suite (x_n) converge : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - \ell\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc si $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$: $\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - \ell\| + \|\ell - x_q\| \leq \varepsilon$.

Remarque : La réciproque est fausse.

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

Démonstration : Soit $\varepsilon = 1$, donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - \ell\| \leq 1$.

Soit $r = \mathrm{Max}(1, \|x_0 - \ell\|, \ldots, \|x_{n_0} - \ell\|)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n - \ell\| \leq r$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration : On procède par dichotomie. Soit (x_n) une suite bornée de réels.
Donc (x_n) une suite d'éléments de $[a,b]$ avec $a<b$. Soit $\varphi(0)=0$.
L'un au moins des intervalles $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ contient une infinité d'éléments de la suite (il existe une infinité d'indices tels que x_n soit dans l'intervalle). Soit I_1 cet intervalle et $\varphi(1)=\mathrm{Min}\{n\in\mathbb{N}^*/\,x_n\in I_1\}$. Donc $\varphi(0)<\varphi(1)$.
On partage I_1 en deux et l'un des deux intervalles contient une infinité d'éléments de la suite. Soit I_2 cet intervalle et $\varphi(2)=\mathrm{Min}\{n\in\mathbb{N}/\,n>\varphi(1) \text{ et } x_n\in I_2\}$. Donc $\varphi(1)<\varphi(2)$.
Ainsi, de proche en proche, on construit une suite d'intervalles emboités $I_n=[a_n,b_n]$ de longueur $\dfrac{1}{2^n}$ et une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad x_{\varphi(n)}\in I_n$, donc $a_n\le x_{\varphi(n)}\le b_n$.
Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc convergent vers la même limite $\ell\in[a,b]$. Donc la suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) converge vers $\ell\in[a,b]$.

IV - Applications continues

1) Définitions

Définition : Un point $a\in E$ est adhérent à une partie $A\neq\varnothing$ de E si $\forall r>0\quad B(a,r)\cap A\neq\varnothing$.

Remarque : Tout point de A est adhérent à A.
Exemple : Tout point x vérifiant $\|x-a\|=r$ est adhérent à $A=B(a,r)$.
En effet, si $\varepsilon>r$, la boule $B(x,\varepsilon)$ contient a.
Et, si $\varepsilon\le r$, la boule $B(x,\varepsilon)$ contient $y=x-\dfrac{\varepsilon}{2r}(x-a)$ car $\|y-x\|=\dfrac{\varepsilon}{2}$, et y appartient $B(a,r)$ car $\|y-a\|=r-\dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $\|y-a\|<r$.
Soient $(E,\|\ \|_E)$ et $(F,\|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Définition : Une application f d'une partie $A\neq\varnothing$ de E dans F admet en un point $a\in E$ adhérent à A une limite $\ell\in F$ si : $\forall\varepsilon>0\quad\exists\alpha>0\quad\forall x\in A\quad \|x-a\|_E\le\alpha\Rightarrow\|f(x)-\ell\|_F\le\varepsilon$.

Supposons qu'il existe deux éléments distincts ℓ_1 et ℓ_2 qui conviennent. Soit $\varepsilon>0$.
Donc : $\exists\alpha_1>0\quad\forall x\in A\quad \|x-a\|_E\le\alpha_1\Rightarrow\|f(x)-\ell_1\|_F\le\varepsilon$.
Et $\exists\alpha_2>0\quad\forall x\in A\quad \|x-a\|_E\le\alpha_2\Rightarrow\|f(x)-\ell_2\|_F\le\varepsilon$. Donc :
$\forall x\in A\quad \|x-a\|_E\le\mathrm{Min}(\alpha_1,\alpha_2)\Rightarrow\|\ell_1-\ell_2\|_F\le\|f(x)-\ell_1\|_F+\|f(x)-\ell_2\|_F\le 2\varepsilon$.
Or ceci n'est pas possible, par exemple si $\varepsilon=\dfrac{1}{3}\|\ell_1-\ell_2\|$.

Théorème : Si une application admet en a une limite ℓ, alors ℓ est unique.

On parlera donc de la limite de l'application et on note : $\ell=\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

Caractérisation séquentielle : Une application f d'une partie $A\neq\varnothing$ de E dans F admet en $a\in A$ une limite ℓ si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ est convergente vers ℓ.

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f une application qui admet en $a\in A$ une limite ℓ.

Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x-a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon$.

Soit une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a.

Donc : $\forall \alpha > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - a\| \leq \alpha$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f(x_n)-\ell\|_F \leq \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit *f* une application définie sur A telle que, pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers *a*, la suite $(f(x_n))$ soit convergente vers ℓ.

On raisonne par l'absurde, en supposant que *f* n'admet pas ℓ pour limite en *a*.

Donc : $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x-a\|_E \leq \alpha$ et $\|f(x)-\ell\|_F > \varepsilon$.

Donc : $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in A \quad \|x_n - a\|_E \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n)-\ell\|_F > \varepsilon$.

Donc on aboutit à une contradiction car on a construit une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers *a* et la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ.

Donc *f* admet ℓ pour limite en *a*.

<u>Définition</u> : Une application *f* d'une partie $A \neq \varnothing$ de *E* dans *F* est continue en $a \in A$ si elle admet en *a* une limite. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En effet, si $a \in A$ (donc *a* est adhérent à *A*) et si *f* admet une limite ℓ en *a*, alors : $\forall \varepsilon > 0 \quad \|f(a)-\ell\|_F \leq \varepsilon$. car $x = a$ vérifie $\|x-a\|_E \leq \alpha$ pour tout $\alpha > 0$.

Donc $\ell = f(a)$.

<u>Caractérisation séquentielle</u> : Une application *f* d'une partie $A \neq \varnothing$ de *E* dans *F* est continue en $a \in A$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de *A* qui converge vers *a*, la suite $(f(x_n))$ est convergente vers $f(a)$.

C'est la caractérisation de la limite.

<u>Définition</u> : Une application *f* d'une partie $A \neq \varnothing$ de *E* dans *F* est continue sur *A* si elle est continue en tout point de *A*.

<u>*Exemple*</u> : L'application *f* de *E* dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|$ est continue sur *E*.

En effet : $\forall (x,a) \in E^2 \quad |f(x) - f(a)| = \big|\|x\| - \|a\|\big| \leq \|x-a\|$.

Donc pour tout *a* de *E* : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha = \varepsilon \quad \forall x \in E \quad \|x-a\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$.

Plus généralement le raisonnement sera le même pour toute fonction vérifiant $\forall (x,a) \in E^2 \quad \|f(x)-f(a)\|_F \leq k\|x-a\|_E$ où *k* est un réel positif.

<u>Définition</u> : Etant donné un réel $k > 0$, une application est *k*-lipschitzienne de *E* dans *F* si $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|f(x)-f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$.

<u>*Exemple*</u> : La norme est 1- lipschitzienne de *E* dans $\mathbb{R}$.

Toute combinaison linéaire d'applications lipschitziennes de *E* dans *F* est lipschitzienne :

$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(y)\|_F \leq |\lambda| \|f(x)-f(y)\|_F + \|g(x)-g(y)\|_F$

Donc si *f* est *k*-lipschitzienne et *g* est *k*'-lipschitzienne :

$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(y)\|_F \leq (|\lambda| k + k')\|x-y\|_E$.

Si *f* est *k*-lipschitzienne de *E* dans *F* et si *g* est *k*'-lipschitzienne de *F* dans *G*, la composée $g \circ f$ est lipschitzienne de *E* dans *G* :

$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)\|_G \leq k'\|f(x)-f(y)\|_F \leq kk'\|x-y\|_E$.

<u>Théorème</u> : Toute application *k*-lipschitzienne de *E* dans *F* est continue sur *E*.

Démonstration identique à celle de la norme avec $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

2) **Propriétés**

Théorème : Si une fonction admet en a une limite ℓ pour une norme, elle admet la même limite ℓ pour toute norme équivalente.
Si une fonction est continue en a pour une norme, elle est continue en a pour toute norme équivalente.

Même justification que pour les suites.
Donc pour étudier une limite, on peut choisir n'importe quelle norme équivalente.

Théorème : L'ensemble des fonctions définies sur A et qui admettent une limite en a est un espace vectoriel et l'application qui à toute fonction associe sa limite est linéaire.
L'ensemble des fonctions définies sur A et continues en $a \in A$ est un espace vectoriel.

Démonstration : Si f et g sont deux fonctions définies sur A de limites ℓ et ℓ' en a et si $\lambda \in K - \{0\}$, on pose : $\forall x \in A \quad h(x) = \lambda f(x) + g(x)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$: $\exists \alpha_1 > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x-a\|_E \le \alpha_1 \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \le \dfrac{\varepsilon}{2|\lambda|}$.

Et : $\exists \alpha_2 > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x-a\|_E \le \alpha_2 \Rightarrow \|g(x)-\ell'\|_F \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc :

$\forall x \in A \quad \|x-a\|_E \le \mathrm{Min}(\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow \|h(x) - \lambda\ell - \ell'\|_F \le |\lambda| \|f(x)-\ell\|_F + \|g(x)-\ell'\|_F \le \varepsilon$.

Donc la fonction h admet en a la limite $\lambda\ell + \ell'$.
Si $\lambda = 0$, la propriété est évidente.
Dans le cas des applications linéaires : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F$.
Donc la continuité en tout point se ramène à la continuité en 0_E.

Théorème Une application linéaire de E dans F est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0_E : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E \quad \|x\|_E \le \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \le \varepsilon$.

Un cas particulier est celui des applications composantes.

Théorème : Si $E = E_1 \times ... \times E_p$ est un produit d'espaces vectoriels normés, les applications composantes $p_k : x = (x_1, ..., x_p) \mapsto x_k$ sont continues de E muni de la norme produit dans (E_k, N_k).

En effet, elles sont linéaires et $\forall x \in E \quad N_k[p_k(x)] \le N(x)$ car $N(x) = \underset{1 \le k \le p}{\mathrm{Max}} N_k(x_k)$.

Théorème Une application linéaire de E dans F est continue sur E si et seulement si elle est bornée sur la boule unité $B_f(0_E, 1)$: $\exists M \ge 0 \quad \forall x \in E \quad \|x\|_E \le 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \le M$.

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f une application linéaire continue sur E. Donc elle est continue en 0_E.
Donc : $\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E \quad \|x\|_E \le \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \le 1$. Or : $\forall x \in B_f(0_E, 1) \quad \|\alpha x\| \le \alpha$.

Donc $\forall x \in B_f(0_E, 1) \quad \|f(\alpha x)\|_F \le 1$, donc $\|\alpha f(x)\|_F \le 1$, donc $\|f(x)\|_F \le \dfrac{1}{|\alpha|}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit f une application linéaire bornée sur la boule unité.
Donc : $\exists M \ge 0 \quad \forall x \in E \quad \|x\|_E \le 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \le M$.

Or : $\forall x \in E - \{0_E\} \quad \dfrac{1}{\|x\|_E} x \in B_f(0_E, 1)$, donc $\forall x \in E - \{0_E\} \quad \left\| f\left(\dfrac{1}{\|x\|_E} x\right) \right\|_F \le M$.

Par linéarité : $\forall x \in E - \{0_E\} \quad \left\| \dfrac{1}{\|x\|_E} f(x) \right\|_F \le M$, donc $\forall x \in E - \{0_E\} \quad \|f(x)\|_F \le M \|x\|_E$.

Donc $\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \le M\|x\|_E$. Donc : $\exists \alpha = \dfrac{\varepsilon}{M} \quad \forall x \in E \quad \|x\|_E \le \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \le \varepsilon$.

Donc f est continue en 0_E, donc continue sur E.

Donc si f est linéaire et continue, $\left\{\|f(x)\|_F \,/\, x\in B_f(0_E,1)\right\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}^+$, donc admet une borne supérieure.

<u>Théorème</u> : L'application qui à toute application f linéaire de E dans F et continue sur E associe le réel $N(f)=\operatorname{Sup}\left\{\|f(x)\|_F \,/\, x\in B_f(0_E,1)\right\}$ est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues sur E, appelée <u>norme subordonnée</u> aux normes de E et de F.

<u>Démonstration</u> :

- $N(f)=0$ si et seulement si $\forall x\in B_f(0_E,1)$ $\|f(x)\|_F=0$, donc si $f(x)=0_F$.

  Or $\forall x\in E-\{0_E\}$ $\dfrac{1}{\|x\|_E}x\in B_f(0_E,1)$, donc $\forall x\in E-\{0_E\}$ $f\left(\dfrac{1}{\|x\|_E}x\right)=0_F$.

  Donc $\forall x\in E-\{0_E\}$ $\dfrac{1}{\|x\|_E}f(x)=0_F$, donc $f(x)=0_F$. Et $f(0_E)=0_F$, donc $f=0$.

- $N(\lambda f)=\operatorname{Sup}\left\{\|\lambda f(x)\|_F \,/\, x\in B_f(0_E,1)\right\}=\operatorname{Sup}\left\{|\lambda|\|f(x)\|_F \,/\, x\in B_f(0_E,1)\right\}$.

  Or $\forall x\in B_f(0_E,1)$ $\|f(x)\|_F\le N(f)$, donc $\forall\lambda\in K$ $N(\lambda f)\le|\lambda|N(f)$.

  Donc $\forall\lambda\in K-\{0\}$ $N\left(\dfrac{1}{\lambda}\lambda f\right)\le\dfrac{1}{|\lambda|}N(\lambda f)$, donc $|\lambda|N(f)\le N(\lambda f)$.

  Donc $\forall\lambda\in K$ $N(\lambda f)=|\lambda|N(f)$ car c'est aussi vérifié pour $\lambda=0$.

- $N(f+g)=\operatorname{Sup}\left\{\|f(x)+g(x)\|_F \,/\, x\in B_f(0_E,1)\right\}$.

  Or $\forall x\in E$ $\|f(x)+g(x)\|_F\le\|f(x)\|_F+\|g(x)\|_F$.

  Donc $\forall x\in B_f(0_E,1)$ $\|f(x)+g(x)\|_F\le N(f)+N(g)$. Donc $N(f+g)\le N(f)+N(g)$.

Donc, c'est bien une norme.

<u>Propriété</u> : Si f et g sont linéaires et continues : $N(g\circ f)\le N(g)N(f)$.

En effet : $\forall x\in B_f(0_E,1)$ $\|f(x)\|_F\le N(f)$, donc $\forall x\in B_f(0_E,1)$ $\left\|\dfrac{1}{N(f)}f(x)\right\|_F\le 1$.

Donc $\forall x\in B_f(0_E,1)$ $\dfrac{1}{N(f)}f(x)\in B_f(0_F,1)$, donc $\left\|g\left(\dfrac{1}{N(f)}f(x)\right)\right\|_G\le N(g)$.

Donc : $\forall x\in B_f(0_E,1)$ $\|(g\circ f)(x)\|_G\le N(g)N(f)$. Donc $N(g\circ f)\le N(g)N(f)$.

IV - Topologie

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel muni d'une norme notée $\|\ \|$.

1) Parties ouvertes

Par analogie avec les propriétés des boules, on définit la notion d'« ouvert ».

<u>Définition</u> : Une partie D de E est ouverte si $D=\varnothing$ ou si pour tout $x\in D$, il existe une boule ouverte de centre x contenue dans D (D voisinage de chacun de ses points).

C'est-à-dire : $D=\varnothing$ ou : $\forall x\in D$ $\exists\varepsilon\in]0,+\infty[$ $B(x,\varepsilon)\subset D$.

<u>Exemples</u> :

- $\varnothing$ et E sont des parties ouvertes de E.
- Les boules ouvertes sont des parties ouvertes de E, mais pas les boules fermées.

<u>Propriétés</u> :

a) La réunion d'un nombre fini ou infini de parties ouvertes est une partie ouverte.

b) L'intersection d'un nombre <u>fini</u> de parties ouvertes est une partie ouverte.

Démonstration :

a) Soit $(D_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E et $D=\bigcup_{i\in I} D_i$. Si $D=\varnothing$, alors D est un ouvert. Sinon, soit $x\in D$. Donc il existe $i\in I$ tel que $x\in D_i$. Comme D_i est un ouvert de E, il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que $B(x,\varepsilon)\subset D_i$. Or $D_i\subset D$. Donc $B(x,\varepsilon)\subset D$. Donc D est un ouvert.

b) Soit $(D_i)_{1\le i\le n}$ une famille d'ouverts de E et $D=\bigcap_{i=1}^{n} D_i$. Soit $x\in D$. Donc pour tout $i\in [\![1,n]\!]$, on a $x\in D_i$. Comme, pour tout $i\in [\![1,n]\!]$, D_i est un ouvert de E, il existe un réel $\varepsilon_i>0$ tel que $B(x,\varepsilon_i)\subset D_i$. Donc $\bigcap_{i=1}^{n} B(x,\varepsilon_i)\subset D$. Or on a vu que $\bigcap_{i=1}^{n} B(x,\varepsilon_i)=B(x,\varepsilon)$ si $\varepsilon=\mathrm{Min}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$. Comme les ε_i sont en nombre fini, ε est l'un des ε_i et donc $\varepsilon>0$. Donc $B(x,\varepsilon)\subset D$. Donc D est un ouvert.

Remarque : Par contre, dans le cas d'une intersection d'un nombre infini d'ouverts, le minimum ε ne serait pas forcément atteint et on pourrait avoir $\varepsilon=0$. Donc une intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas forcément un ouvert.

Théorème : Si D_1, ..., D_p sont des parties ouvertes des espaces vectoriels normés (E_1,N_1), ..., (E_p,N_p), alors $D=D_1\times...\times D_p$ est une partie ouverte de $E=E_1\times...\times E_p$ muni de la norme produit.

Démonstration : Soit $x\in D$. Donc $x=(x_1,...,x_p)$ et $\forall k\in[\![1,p]\!] \quad x_k\in D_k$.

Or les D_k sont des ouverts. Donc $\forall k\in[\![1,p]\!] \quad \exists r_k>0 \quad B(x_k,r_k)\subset D_k$.

Soit $r=\underset{1\le k\le p}{\mathrm{Min}}\, r_k$ et soit $y\in B(x,r)$. Donc $N(y-x)<r$. Or $N(y-x)=\underset{1\le k\le p}{\mathrm{Max}}\, N_k(y_k-x_k)$.

Donc $y=(y_1,...,y_p)$ et $\forall k\in[\![1,p]\!] \quad N_k(y_k-x_k)<r\le r_k$, donc $y_k\in D_k$. Donc $y\in D$.

Donc $B(x,r)\subset D$. Donc D est un ouvert de E.

Théorème : Si f est continue sur E, l'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E.

Démonstration : Soit D un ouvert de F et $A=f^{-1}(D)$. Si $A=\varnothing$, c'est un ouvert.

Si $A\neq\varnothing$, soit $a\in A$. Donc $f(a)\in D$. Or D est un ouvert, donc $\exists\varepsilon>0 \quad B(f(a),\varepsilon)\subset D$.

Or f est continue en a. Donc : $\exists\alpha>0 \quad \forall x\in E \quad \|x-a\|_E\le\alpha \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F\le\varepsilon$.

Donc : $\forall x\in B(a,\alpha) \quad f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$, donc $f(x)\in D$. Donc $B(a,\alpha)\subset A$.

Donc dans les deux cas, $A=f^{-1}(D)$ est un ouvert.

Remarque : C'est faux pour l'image directe. Par exemple si $f(x)=|x|$, $f(]-1,1[)=[0,1[$.

2) Parties fermées

Les boules fermées ne sont pas des parties ouvertes de E. Par contre, si D est le complémentaire d'une boule fermée $B_f(a,r)$, c'est-à-dire si $D=\{x\in E/\|x-a\|>r\}$, on peut montrer que D est une partie ouverte.

En effet, pour tout $x\in D$ on peut poser $\varepsilon=\frac{1}{2}[\|x-a\|-r]$ (donc >0).

Alors : $\forall y\in B(x,\varepsilon) \quad \|x-a\|\le\|y-a\|+\|x-y\|<\|y-a\|+\varepsilon$.

Donc $\|y-a\|\ge\|x-a\|-\varepsilon$. Or : $\|x-a\|=r+2\varepsilon$. Donc : $\|y-a\|\ge r+\varepsilon>r$. Donc $y\in D$. Donc $\forall x\in D \quad \exists\varepsilon\in]0,+\infty[\quad B(x,\varepsilon)\subset D$.

Donc D est une partie ouverte de E.

On en déduit une généralisation de la notion de « fermé ».

<u>Définition</u> : Une partie D de E est fermée si son complémentaire $E-D$ est une partie ouverte de E.

<u>Exemples</u> :
Les boules fermées sont des parties fermées de E.
$\varnothing$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées de E.

<u>Propriétés</u> :
a) La réunion d'un nombre <u>fini</u> de parties fermées est une partie fermée.
b) L'intersection d'un nombre fini ou infini de parties fermées est une partie fermée.

Ces propriétés sont des conséquences évidentes de celles des ouverts par passage au complémentaire.

<u>Théorème</u> : Si D_1, ..., D_p sont des parties fermées des espaces vectoriels normés (E_1,N_1), ..., (E_p,N_p), alors $D=D_1\times\ldots\times D_p$ est une partie fermée de $E=E_1\times\ldots\times E_p$ muni de la norme produit.

<u>Démonstration</u> : Soit $x=(x_1,\ldots,x_p)$. Alors : $x\notin D \Leftrightarrow \exists k\in [\![1,p]\!] \quad x_k\notin D_k$.

Donc $C(D)=\bigcup_{k=1}^{p} E_1\times\ldots\times E_{k-1}\times C(D_k)\times E_{k+1}\times\ldots\times E_p$.

Donc le complémentaire de D est une réunion de produits d'ouverts de E.
Donc le complémentaire de D est un ouvert de E. Donc D est un fermé de E.

<u>Théorème</u> : Si f est continue sur E, l'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E.

<u>Démonstration</u> : Soit D un fermé de F. Donc son complémentaire $C(D)$ est un ouvert de F. Or f est continue sur E, donc $f^{-1}[C(D)]$ est un ouvert de E.
Or $f^{-1}[C(D)]=C[f^{-1}(D)]$. Donc $A=f^{-1}(D)$ est un fermé de E.

<u>Remarque</u> : C'est faux pour l'image directe. Par exemple, $\mathbb{R}$ est un fermé puisque son complémentaire est ouvert, et si $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $f(\mathbb{R})=[0,1[$ qui n'est pas fermé.

<u>Caractérisation séquentielle</u> : Une partie A de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A.

<u>Démonstration</u> :
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit A une partie fermée de E et (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell\in E$. On raisonne par l'absurde : supposons que $\ell\notin A$.
Donc ℓ appartient au complémentaire de A qui est un ouvert. Donc il existe une boule $B(\ell,r)$ contenue dans ce complémentaire, donc qui ne contient aucun élément de A, donc aucun élément de la suite.
Or : $\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq n_0 \quad \|x_n-\ell\|\leq\varepsilon$, donc $x_n\in B(\ell,\varepsilon)$.
On aboutit à une contradiction pour $\varepsilon=r$. Donc $\ell\in A$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit A une partie de E telle que toute suite convergente d'éléments de A ait sa limite dans A. On raisonne par l'absurde : supposons que A ne soit pas fermé.
Donc le complémentaire de A n'est pas ouvert.
Donc il existe $a\notin A$ tel que $\forall\varepsilon>0 \quad B(a,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$.
Donc $\forall n\in\mathbb{N} \quad \exists x_n\in A \quad x_n\in B\left(a,\dfrac{1}{n+1}\right)$, donc $\|x_n-a\|\leq\dfrac{1}{n+1}$.
Donc la suite (x_n) vérifie : $\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq n_0 \quad \|x_n-a\|\leq\varepsilon$.
Donc on a construit une suite d'éléments de A qui converge vers $a\notin A$.
On aboutit à une contradiction. Donc A est un fermé.

3) <u>Adhérence d'une partie</u>

<u>Définition</u> : Un point a est adhérent à une partie $A\neq\varnothing$ si $\forall r>0 \quad B(a,r)\cap A\neq\varnothing$.
L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A est l'ensemble des points adhérents à A.

Exemple : $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$.

Propriétés :
1. $a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de *A* qui converge vers *a*.
2. $a \in \overline{A}$ si et seulement si $d(a,A) = 0$.

Démonstration 1 :

$\boxed{\Rightarrow}$ Mêmes arguments que pour les fermés. Soit $a \in \overline{A}$.

Donc $\forall r > 0 \quad B(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in A \quad x_n \in B\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$, donc $\|x_n - a\| \leq \frac{1}{n+1}$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - a\| \leq \varepsilon$. La suite converge vers *a*.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $a \in E$ tel qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de *A* qui converge vers *a*.

Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - a\| \leq \varepsilon$, donc $x_n \in B(a,\varepsilon) \cap A$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Donc $a \in \overline{A}$.

Démonstration 2 :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $a \in \overline{A}$. Donc il existe une suite (x_n) d'éléments de *A* qui converge vers *a*.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - a\| \leq \varepsilon$. Donc $\operatorname{Inf}\{\|x_n - a\| / n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Or $\{\|x_n - a\| / n \in \mathbb{N}\} \subset A$, donc $0 \leq d(a,A) \leq \operatorname{Inf}\{\|x_n - a\| / n \in \mathbb{N}\}$. Donc $d(a,A) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $d(a,A) = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in A \quad \|x_n - a\| \leq \frac{1}{n+1}$. Donc la suite (x_n) converge vers *a*. Donc $a \in \overline{A}$.

Propriété : $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant *A*.
Conséquence : *A* est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Démonstration :

$\forall a \in A \quad \forall r > 0 \quad a \in B(a,r) \cap A$, donc $B(a,r) \cap A \neq \varnothing$, donc $a \in \overline{A}$. Donc $A \subset \overline{A}$.

Montrons que $\overline{A}$ est un fermé, en montrant que son complémentaire $C(\overline{A})$ est un ouvert. Soit $a \in C(\overline{A})$, donc $a \notin \overline{A}$, donc $\exists r > 0 \quad B(a,r) \cap A = \varnothing$.

Soit $x \in B(a,r)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$, donc $B(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$.

Donc $\forall x \in B(a,r) \quad x \notin \overline{A}$. Donc $B(a,r) \subset C(\overline{A})$.

Donc $C(\overline{A})$ est un ouvert et $\overline{A}$ est un fermé.

Soit *F* un fermé contenant *A*. Donc toute suite convergente d'éléments de *F* a sa limite dans *F*, donc toute suite convergente d'éléments de *A* a sa limite dans *F*. Or sa limite appartient à $\overline{A}$. Donc $\overline{A} \subset F$.

Donc $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant *A*.

Conséquence évidente car *A* sera le plus petit fermé contenant *A*.

$\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant *A*.

Propriétés :
1. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration 1 : On suppose $A \subset B$ et $a \in \overline{A}$. Donc il existe une suite d'éléments de *A* (donc de *B*) qui converge vers *a*. Donc $a \in \overline{B}$. Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Démonstration 2 :

- $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, donc $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cap B$. Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cup B$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
  De plus $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
  Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Définition : Une partie A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

Cela revient à dire que tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.
Exemple : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème : Si deux fonctions f et g continues sur E coïncident sur une partie A dense de E, alors elles sont égales.

Démonstration : Pour tout $a \in E$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a car $\overline{A} = E$. Donc par continuité : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(a)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) = g(x_n)$ car $x_n \in A$. Donc par unicité de la limite : $f(a) = g(a)$.

Par exemple, il suffit de démontrer l'égalité sur $\mathbb{Q}$ de deux fonctions continues pour avoir l'égalité sur $\mathbb{R}$.

Définition : Un point a est valeur d'adhérence d'une suite (x_n) s'il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers a.

Cela revient à dire que a appartient à l'adhérence de $A = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$.
Toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite.
Donc si une suite possède deux valeurs d'adhérence distinctes, elle diverge.

4) Intérieur d'une partie

Définition : Un point a est intérieur à une partie $A \neq \emptyset$ si $\exists r > 0 \quad B(a,r) \subset A$.

L'intérieur $\overset{o}{A}$ d'une partie A est l'ensemble des points intérieurs à A.

Exemple : $B(a,r) = \overbrace{B_f(a,r)}^{o}$.

Propriété : $\overset{o}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Conséquence : A est un ouvert si et seulement si $\overset{o}{A} = A$.

Démonstration : $\forall a \in \overset{o}{A} \quad \exists r > 0 \quad B(a,r) \subset A$, donc $a \in A$. Donc $\overset{o}{A} \subset A$.

Soit Ω un ouvert contenu dans A. Donc $\forall a \in \Omega \quad \exists r > 0 \quad B(a,r) \subset \Omega \subset A$. Donc $\Omega \subset \overset{o}{A}$.

Montrons que $\overset{o}{A}$ est un ouvert. Soit $a \in \overset{o}{A}$, donc $\exists r > 0 \quad B(a,r) \subset A$. Or $B(a,r)$ est un ouvert, donc $B(a,r) \subset \overset{o}{A}$. Donc $\overset{o}{A}$ est un ouvert.

Donc $\overset{o}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
Conséquence évidente car A sera le plus grand ouvert contenu dans A.

$\overset{o}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

Propriétés :

1. $A \subset B \Rightarrow \overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$.
2. $\overbrace{A \cap B}^{o} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$ et $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{o}$.
3. $\overbrace{C(A)}^{o} = C(\overline{A})$ et $\overline{C(A)} = C(\overset{o}{A})$. (complémentaires)

Démonstration 1 : Si $A \subset B$, tous les ouverts contenus dans A sont contenus dans B. En particulier $\overset{o}{A}$ est un ouvert contenu dans B. Donc $\overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$.

Démonstration 2 :

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc $\overbrace{A \cap B}^{o} \subset \overset{o}{A}$ et $\overbrace{A \cap B}^{o} \subset \overset{o}{B}$, donc $\overbrace{A \cap B}^{o} \subset \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$.

  De plus $\overset{o}{A} \subset A$ et $\overset{o}{A} \subset B$, donc $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$.

Donc $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cap B}}$. Donc $\overset{o}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$.

- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $\overset{o}{A} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cup B}}$ et $\overset{o}{B} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cup B}}$, donc $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\overbrace{A \cup B}}$.

<u>Démonstration 3</u> :

- $a \in \overset{o}{\overbrace{C(A)}}$ si et seulement si $\exists r > 0 \quad B(a,r) \subset C(A)$, donc ssi $\exists r > 0 \quad B(a,r) \cap A = \varnothing$, donc ssi $a \notin \overline{A}$. Donc $\overset{o}{\overbrace{C(A)}} = C(\overline{A})$.
- $a \in \overline{C(A)}$ si et seulement si $\forall r > 0 \quad B(a,r) \cap C(A) \neq \varnothing$, donc ssi $\forall r > 0 \quad B(a,r) \not\subset A$, donc ssi $a \notin \overset{o}{A}$. Donc $\overline{C(A)} = C(\overset{o}{A})$.

5) Frontière d'une partie

<u>Définition</u> : La frontière d'une partie $A \neq \varnothing$ est $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \overset{o}{A}$.

<u>Exemple</u> : Si $A = B(a,r)$, $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E / \|x - a\| = r\}$.

<u>Propriétés</u> : $\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé et $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}[C(A)]$.

En effet : $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \overset{o}{A} = \overline{A} \cap C(\overset{o}{A}) = \overline{A} \cap \overline{C(A)}$.

Donc c'est une intersection de deux fermés, donc un fermé. Et $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}[C(A)]$.

6) Parties compactes

<u>Définition</u> : Une partie *A* de *E* est compacte si toute suite d'éléments de *A* admet au moins une valeur d'adhérence dans *A*, c'est-à-dire qu'il existe une suite extraite qui converge dans *A*.

<u>Exemple</u> : $[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ n'est pas compact car de la suite de terme général $x_n = n$, on ne peut pas extraire une suite convergente. En effet, toute suite extraite est de la forme $(x_{\varphi(n)})$ avec φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geq n$.

<u>Propriétés</u> :
a) L'intersection d'un nombre fini ou infini de parties compactes est une partie compacte.
b) La réunion d'un nombre <u>fini</u> de parties compactes est une partie compacte.

<u>Démonstration</u> :

a) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties compactes de *E* et $A = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Soit (x_n) une suite d'éléments de *A*, donc de A_i pour tout $i \in I$.

Or pour tout $i \in I$, A_i est compacte, donc il existe une suite extraite $(x_{\varphi_i(n)})$ qui converge vers $\ell_i \in A_i$. Les applications φ_i sont strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_i(n) \geq n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\varphi_i(n) / i \in I\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ minorée par *n*, donc possède un plus petit élément $\varphi(n)$.

$\forall i \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_i(n) < \varphi_i(n+1)$, donc $\varphi(n) < \varphi(n+1)$.

Donc φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Donc la suite $(x_{\varphi(n)})$ est extraite des suites convergentes $(x_{\varphi_i(n)})$, donc est convergente. Soit ℓ sa limite.

De plus, pour tout $i \in I$, elle a même limite que $(x_{\varphi_i(n)})$. Donc : $\forall i \in I \quad \ell_i = \ell$.

Donc : $\forall i \in I \quad \ell \in A_i$. Donc $\ell \in A$. Donc on a construit une suite extraite de (x_n) qui converge dans *A*. Donc *A* est compacte.

b) Soit A_1, ..., A_k une famille finie de parties compactes de E et $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Soit (x_n) une suite d'éléments de A. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists i_n \in I \quad x_n \in A_{i_n}$.

Comme les A_i sont en nombre fini, il existe au moins un entier $i \in I$ tel que $K_i = \{n \in \mathbb{N} / x_n \in A_i\}$ soit infini. En renumérotant de manière strictement croissante les éléments de la suite qui appartiennent à A_i, on construit une suite extraite de (x_n) dont tous les éléments sont dans le compact A_i, donc dans A. Donc de cette suite extraite, on peut extraire une suite qui converge dans A_i, donc dans A. Donc A est un compact.

<u>Remarque</u> : C'est faux pour une réunion d'une infinité de compacts. Par exemple les intervalles $[-n,n]$ sont des parties compactes de $\mathbb{R}$. mais leur réunion qui est égale à $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

<u>Théorème</u> : Si D_1, ..., D_p sont des parties compactes des espaces vectoriels normés (E_1, N_1), ..., (E_p, N_p), alors $D = D_1 \times ... \times D_p$ est une partie compacte de $E = E_1 \times ... \times E_p$ muni de la norme produit.

<u>Démonstration</u> : Soit (x_n) une suite d'éléments de D. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = (x_n^{(1)}, ..., x_n^{(p)})$.

$(x_n^{(1)})$ est une suite d'éléments de D_1. Or D_1 est compacte dans (E_1, N_1).

Donc on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)}^{(1)})$ qui converge vers $\ell_1 \in D_1$.

La suite $(x_{\varphi_1(n)})$ est extraite de (x_n).

$(x_{\varphi_1(n)}^{(2)})$ est une suite d'éléments de D_2. Or D_2 est compacte dans (E_2, N_2).

Donc on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi_2(n)}^{(2)})$ qui converge vers $\ell_2 \in D_2$.

Et la suite $(x_{\varphi_2(n)}^{(1)})$ est extraite de $(x_{\varphi_1(n)}^{(1)})$, donc converge vers $\ell_1 \in D_1$.

Et ainsi de suite jusqu'à p. On obtient une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) dont toutes les composantes $(x_{\varphi(n)}^{(k)})$ sont convergentes vers $\ell_k \in D_k$.

Soit $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p)$, donc $\ell \in D$. Et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad N(x_{\varphi(n)} - \ell) = \underset{1 \le k \le p}{\mathrm{Max}} N_k(x_{\varphi(n)}^{(k)} - \ell_k)$.

Comme pour tout k, on a $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)}^{(k)} = \ell_k$, alors $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$.

On a extrait une sous-suite qui converge vers D. Donc D est compacte.

<u>Théorème</u> : Toute partie compacte de E est fermée et bornée.

<u>Démonstration</u> : Soit A une partie compacte de E.

Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de A. Sa limite ℓ est l'unique valeur d'adhérence de la suite. Donc toute suite extraite converge vers ℓ. Or A est compacte, donc $\ell \in A$. Donc A est une partie fermée de E.

Supposons que A ne soit pas bornée. Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in A \quad \|x_n\| > n$.

On a ainsi construit une suite d'éléments de A. Or A est compacte. Donc il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge dans A.

φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \ge n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_{\varphi(n)}\| > n$. Contradiction car toute suite convergente est bornée.

Donc la partie A est bornée.

<u>Théorème</u> : En dimension finie, une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

<u>Démonstration</u> : Il s'agit de montrer la réciproque.

- La propriété est vraie dans $\mathbb{R}$: tout segment $[a,b]$ est compact ($a < b$) car de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente dans $[a,b]$.

- On peut considérer $\mathbb{C}$ comme produit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme produit $N(x+iy)=\text{Max}(|x|,|y|)$. Soit une partie *A* fermée et bornée de $\mathbb{C}$.

  Soit (z_n) une suite d'éléments de *A*, donc bornée. Donc les suites (x_n) et (y_n) des parties réelles et imaginaires sont bornées, donc on peut extraire des sous-suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\psi(n)})$ convergentes. Donc la suite $(z_{\psi\circ\varphi(n)})$ est une suite extraite de (z_n) et convergente. Et comme *A* est fermée, elle converge dans *A*.

  Donc *A* est une partie compacte de $\mathbb{C}$.
- Soit *E* un espace vectoriel de dimension *p* sur $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$ de base $(e_1,...,e_p)$.

  On le munit de la norme $N_\infty(x)=\|x\|_\infty=\underset{1\le k\le n}{\text{Max}}|x_k|$ si $x=\sum_{k=1}^{p}x_k e_k$.

  Soit *A* une partie fermée et bornée de *E*. Et soit (x_n) une suite d'éléments de *E*.

  Pour tout *n*, on note : $x=\sum_{k=1}^{p}x_n^{(k)}e_k$. Donc les suites $(x_n^{(k)})$ sont des suites bornées de *K*. On peut donc en extraire des sous-suites convergentes.

  Donc, comme pour le produit de compacts, on peut construire une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) dont toutes les composantes $(x_{\varphi(n)}^{(k)})$ sont convergentes. Donc la suite $(x_{\varphi(n)})$ est convergente. Or *A* est fermée, donc elle converge dans *A*.

  Donc *A* est un compact.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une application continue d'un espace vectoriel normé *E* dans un espace vectoriel normé *F* et si *A* est un compact de *E*, alors $f(A)$ est un compact de *F*.

<u>Démonstration</u> : Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(A)$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists x_n\in A\quad y_n=f(x_n)$. Or *A* est un compact, donc on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente dans *A*. Soit $\ell\in A$ sa limite.

Or *f* est continue donc la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(\ell)$ qui appartient à $f(A)$.

Donc $f(A)$ est un compact de *F*.

<u>Corollaire</u> : Si *f* est une application continue d'un espace vectoriel normé *E* dans $\mathbb{R}$ et si *A* est un compact de *E*, alors *f* est bornée sur *A* et atteint ses bornes.

<u>Démonstration</u> : En effet, $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc $f(A)$ est fermé et borné.

Donc *f* est bornée. Donc $f(A)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée et minorée.

Donc $f(A)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

$m=\text{Inf } f(A)$, donc $\forall\varepsilon>0\quad \exists x\in f(A)\quad m\le x\le m+\varepsilon$.

Donc en particulier : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists x_n\in f(A)\quad m\le x_n\le m+\dfrac{1}{n+1}$.

Donc il existe une suite d'éléments de $f(A)$ qui converge vers *m*. Donc $m\in\overline{f(A)}$.

Un raisonnement analogue montre que $M\in\overline{f(A)}$.

Or $f(A)$ est fermé. Donc $m\in f(A)$ et $M\in f(A)$. Donc *f* atteint ses bornes.

<u>Théorème</u> : Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

<u>Démonstration</u> : Soit *E* un espace vectoriel de dimension *p* sur $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$ de base $(e_1,...,e_p)$. On le munit de la norme $N_\infty(x)=\|x\|_\infty=\underset{1\le k\le n}{\text{Max}}|x_k|$ si $x=\sum_{k=1}^{p}x_k e_k$.

Soit *N* une autre norme sur *E*. Alors : $\forall x\in E\quad N(x)\le\sum_{k=1}^{p}N(x_k e_k)$.

Donc : $\forall x \in E \quad N(x) \le \sum_{k=1}^{p} |x_k| N(e_k) \le N_\infty(x) \sum_{k=1}^{p} N(e_k)$. Soit $b = \sum_{k=1}^{p} N(e_k)$.

Donc N est b-lipschitzienne car $\forall (x,y) \in E^2 \quad N(x) \le bN_\infty(x)$, donc continue sur E.

La partie $A = \{x \in E / N_\infty(x) = 1\}$ est bornée par construction et fermée car image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue N_∞.

Donc c'est un compact de E. Donc N est bornée sur A : $\forall x \in A \quad 0 < a \le N(x) \le b$.

Or pour tout $x \ne 0_E$, le vecteur $\frac{1}{N_\infty(x)} x$ appartient à A.

Donc $\forall x \in E - \{0_E\} \quad a \le N\left(\frac{1}{N_\infty(x)} x\right) \le b$, donc $a \le \frac{N(x)}{N_\infty(x)} \le b$.

donc $\forall x \in E \quad aN_\infty(x) \le N(x) \le bN_\infty(x)$ car c'est aussi vrai pour 0_E.

Donc les normes sont équivalentes.

7) **Parties complètes**

Définition : Une suite de Cauchy est une suite qui vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p \ge n_0 \quad \forall q \ge n_0 \quad \|x_p - x_q\| \le \varepsilon.$$

Exemples : Les suites convergentes.

Propriétés :
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite de Cauchy qui a au moins une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.
- Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente est convergente.

Remarque : Les deux dernières propriétés sont équivalentes.

Démonstration :

- Si (x_n) est de Cauchy, pour $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p \ge n_0 \quad \forall q \ge n_0 \quad \|x_p - x_q\| \le 1$.
  Donc $\forall n \ge n_0 \quad \|x_n - x_{n_0}\| \le 1$, donc $\{x_n / n \ge n_0\}$ est bornée, et $\{x_n / n < n_0\}$ est une partie finie, donc bornée. Donc la suite est bornée.
- Si (x_n) est de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p \ge n_0 \quad \forall q \ge n_0 \quad \|x_p - x_q\| \le \frac{\varepsilon}{2}$.
  Si (x_n) possède une valeur d'adhérence ℓ, il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite qui converge vers ℓ : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_1 \quad \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \le \frac{\varepsilon}{2}$.
  Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n - \ell\| \le \|x_n - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \ell\|$ et $\varphi(n) \ge n$ (φ strictement croissante).
  Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 = Max(n_0, n_1) \quad \forall n \ge n_2 \quad \|x_n - \ell\| \le \varepsilon$. Donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

On a vu que toute suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque est fausse.

Définition : Une partie A d'un espace vectoriel normé est complète si toute suite de Cauchy d'éléments de A est convergente dans A.
Un espace vectoriel normé E est complet si toute suite de Cauchy converge.

Exemple : On a montré que dans $\mathbb{R}$, de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Or toute suite de Cauchy est bornée, donc de toute suite de Cauchy de réels on peut extraire une suite convergente. Donc $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet et tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est une partie complète de $\mathbb{R}$.

Théorème : Toute partie complète d'un espace vectoriel normé E est fermée.

Démonstration : Soit A une partie complète de E et $a \in \overline{A}$.

Donc il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a. Cette suite convergente est une suite de Cauchy de A. Donc elle converge dans A. Donc $a \in A$.

Donc $\overline{A} = A$. Donc A est une partie fermée de E.

Théorème : Si E est un espace vectoriel normé complet, toute partie fermée de E est complète.

Démonstration : Soit E un espace vectoriel normé complet et A une partie fermée de E.
Soit une suite de Cauchy (x_n) d'éléments de A (donc de E). Elle converge vers $a \in E$ car E est complet. Donc a est valeur d'adhérence de la suite, donc $a \in \overline{A}$.
Or A est fermé, donc $a \in A$. Donc toute suite de Cauchy de A converge dans A.
Donc A est une partie complète de E.

Théorème : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces vectoriels normés complets.

Démonstration : On l'a déjà vu pour $\mathbb{R}$.
Soit (z_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n_0 \quad \forall q \geq n_0 \quad \left|z_p - z_q\right| \leq \varepsilon$.
Or, si $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$: $\left|x_p - x_q\right| \leq \left|z_p - z_q\right|$ et $\left|y_p - y_q\right| \leq \left|z_p - z_q\right|$.
Donc les suites (x_n) et (y_n) sont des suites de Cauchy réelles, donc convergentes.
Soit $a = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $b = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Or : $\left|z_n - (a+ib)\right| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$.
Donc la suite (z_n) converge vers $a + ib$.

Théorème : Tout espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet.

Démonstration : Soit E un espace vectoriel normé de dimension r de base $(e_1, \ldots, e_r)$.
Soit (x_n) une suite de Cauchy et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \sum\limits_{k=1}^{r} x_n^{(k)} e_k$.
E est de dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes. Choisissons par exemple dans E la norme $N_1(x) = \|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k\right|$.
Donc $\forall k \in [\![1, r]\!] \quad \left|x_p^{(k)} - x_p^{(k)}\right| \leq \left\|x_p - x_q\right\|$. Donc, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, les suites $(x_n^{(k)})$ sont des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc convergentes.
Soit pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n^{(k)}$ et $a = \sum\limits_{k=1}^{r} a_k e_k$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\|x_n - a\right\| = \sum\limits_{k=1}^{r} \left|x_n^{(k)} - a_k\right|$. Donc la suite (x_n) converge vers a.