ESPACES EUCLIDIENS

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie.

I - Produit scalaire

1) Définition

Définition : On appelle produit scalaire sur E toute forme φ bilinéaire, symétrique, définie et positive, c'est-à-dire toute application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1. Pour tout $y\in E$, l'application $x\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité de φ à gauche).
2. Pour tout $x\in E$, l'application $y\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité de φ à droite).
3. $\forall (x,y)\in E^2 \quad \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ (symétrie).
4. $\forall x\in E \quad \varphi(x,x)\geq 0$ (positivité).
5. $\forall x\in E \quad \varphi(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Notation : $\varphi(x,y)=<x,y>$.

Exercice : Vérifier que les exemples suivants sont des produits scalaires.

Exemple 1 : $<x,y>=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ sur $E=\mathbb{R}^n$.

Exemple 2 : $<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ sur $E=\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 3 : $<M,N>=\mathrm{Tr}({}^tMN)$ sur $E=\mathscr{M}_{n,p}[\mathbb{R}]$.

Définition : On appelle espace vectoriel euclidien tout espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Remarque : On peut définir un produit scalaire sur un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie, par exemple : $<f,g>=\int_a^b f(t)g(t)dt$ sur $E=C^0([a,b])$ avec $a<b$.

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien.

2) Expression matricielle

Dans une base $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ de E, pour tous vecteurs $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y=\sum_{k=1}^{n} y_k e_k$:

$<x,y>=<\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j <e_i,e_j>$. Donc avec $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$:

Propriété : Si $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ est une base de E et A la matrice carrée (symétrique) d'ordre n de coefficients $a_{i,j}=<e_i,e_j>$, alors : $\forall (x,y)\in E^2 \quad <x,y>={}^tXAY$.

Exercice : Pour chacun des exemples de produit scalaire, déterminer la matrice A pour la base canonique de l'espace vectoriel considéré.

II - Norme euclidienne associée

1) Définition

Définition : Si E est un espace vectoriel euclidien, on appelle « norme » euclidienne associée au produit scalaire l'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x\in E \quad \|x\|=\sqrt{<x,x>}.$$

Exercice : Pour chacun des exemples de produit scalaire, déterminer l'expression de la « norme » euclidienne.

Expression matricielle : Si $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ est une base de E et A la matrice carrée d'ordre n de coefficients $a_{i,j}=<e_i,e_j>$, alors : $\forall x\in E \quad \|x\|=\sqrt{{}^tXAX}$.

(en identifiant ${}^tXAX$ avec son unique élément).

2) **Propriétés**

Premières Propriétés : $\forall x\in E \quad \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_E$.

$\forall x\in E \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$.

Démonstration :

- $\forall x\in E \quad \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$ d'après l'axiome 5.
- $\forall x\in E \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \|\lambda x\|=\sqrt{<\lambda x,\lambda x>}=\sqrt{\lambda^2<x,x>}$ donc $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$.

Identités remarquables : $\forall(x,y)\in E^2 \quad \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2<x,y>$.

$\forall(x,y)\in E^2 \quad \|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2<x,y>$.

$\forall(x,y)\in E^2 \quad <x+y,x-y>=\|x\|^2-\|y\|^2$.

Démonstration :

- $\|x+y\|^2=<x+y,x+y>=<x,x>+<x,y>+<y,x>+<y,y>$.

  Or $<x,y>=<y,x>$. Donc : $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2<x,y>$.
- $\|x-y\|^2=<x-y,x-y>=<x,x>-<x,y>-<y,x>+<y,y>$.

  Donc : $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2<x,y>$.
- $<x+y,x-y>=<x,x>-<x,y>+<y,x>-<y,y>=\|x\|^2-\|y\|^2$.

Identité du parallélogramme : $\forall(x,y)\in E^2 \quad \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

Démonstration : Evidente en ajoutant les deux premières égalités.

Identités de polarisation : $\forall(x,y)\in E^2 \quad <x,y>=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$.

$\forall(x,y)\in E^2 \quad <x,y>=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x+y\|^2\right)$

$\forall(x,y)\in E^2 \quad <x,y>=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$.

Démonstration : Evidente à partir des identités remarquables.

Remarque : La « norme » a été définie à partir du produit scalaire, et les identités de polarisation permettent d'exprimer le produit scalaire à partir de la « norme ».

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall(x,y)\in E^2 \quad |<x,y>|\leq\|x\|\times\|y\|$.

Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration : $\forall(x,y)\in E^2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \|\lambda x+y\|^2\geq 0$.

Donc : $\forall(x,y)\in E^2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \lambda^2\|x\|^2+2\lambda<x,y>+\|y\|^2\geq 0$

- Si $\|x\|=0$, alors $x=0_E$, donc $\forall y\in E \quad |<x,y>|=\|x\|\times\|y\|=0$.

  De plus x et y sont colinéaires, quel que soit $y\in E$.
- Si $\|x\|\neq 0$, alors on a un polynôme du second degré en λ qui ne change pas de signe. Donc son discriminant est négatif ou nul.

  Or : $\Delta=4(<x,y>)^2-4\|x\|^2\times\|y\|^2$. Donc $|<x,y>|\leq\|x\|\times\|y\|$.

De plus, si $\Delta < 0$, le polynôme ne s'annule pas. Par contre, si $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine λ_0, donc $\|\lambda_0 x + y\|^2 = 0$, donc $y = -\lambda_0 x$, donc x et y sont colinéaires.

Inégalité triangulaire (ou de Minkovski) : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Démonstration : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 = 2(<x,y> - \|x\| \times \|y\|)$.

Or : $\forall (x,y) \in E^2 \quad <x,y> \le |<x,y>| \le \|x\| \times \|y\|$. Donc : $\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$.

Donc : $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ car ce sont des réels positifs.

Conséquence : La « norme » euclidienne est bien une norme car elle vérifie :

1. $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
2. $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

3) Distance euclidienne associée

Définition : Si E est un espace vectoriel euclidien, on appelle distance euclidienne associée au produit scalaire l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = \|y - x\|.$$

Les propriétés suivantes sont conséquences des propriétés de la norme.

Propriétés : $\forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$\forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = d(y,x)$.

$\forall (x,y,z) \in E^3 \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. (inégalité triangulaire)

La dernière s'obtient en remarquant que $z - x = (z-y) + (y-x)$.

Propriété : $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad |d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z)$.

Démonstration : En appliquant l'inégalité triangulaire :

$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ donc : $d(x,y) - d(y,z) \le d(x,z)$.

$d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z)$ donc : $d(y,z) - d(x,y) \le d(x,z)$.

Définition : La distance d'un élément x de E à une partie non vide A de E est $d(x,A) = \mathrm{Inf}\{d(x,y) / y \in A\}$.

En effet $\{d(x,y) / y \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$, donc minorée par 0. Donc elle possède une borne inférieure.

III - Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux vecteurs

Définition : Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $<x,y> = 0$.

Remarque : Tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

En effet : $\forall x \in E \quad <x, 0_E> = <x, 0_E + 0_E> = <x, 0_E> + <x, 0_E>$ donc $<x, 0_E> = 0$.

Théorème de Pythagore : Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration : Evidente avec l'une des identités de polarisation.

2) Famille orthonormale

Définition : Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs est orthogonale si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

C'est-à-dire : $\forall (i,j) \in I^2 \quad i \ne j \Rightarrow <e_i, e_j> = 0$. Donc $\forall (i,j) \in I^2 \quad <e_i, e_j> = \delta_{i,j} \|e_i\|^2$.

<u>Théorème de Pythagore</u> : Si $(e_1,...,e_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs, alors :

$$\|e_1+...+e_n\|^2 = \|e_1\|^2+...+\|e_n\|^2.$$

<u>Démonstration</u> : $\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = <\sum_{i=1}^{n} e_i, \sum_{j=1}^{n} e_j> = \sum_{i,j} <e_i,e_j> = \sum_{i,j} \delta_{i,j}\|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2$.

<u>Théorème</u> : Toute famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre.

<u>Démonstration</u> : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de vecteurs telle que $\forall i\in I \quad e_i \neq 0_E$.
Si une famille de réels $(\lambda_i)_{i\in I}$ vérifie $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i = 0_E$, alors : $\forall j\in I \quad <e_j, \sum_{i\in I}\lambda_i e_i> = 0$.

Donc : $\forall j\in I \quad \sum_{i\in I}\lambda_i <e_j,e_i> = 0$, donc $\forall j\in I \quad \lambda_j\|e_j\|^2 = 0$ car $<e_j,e_i> = 0$ si $i\neq j$. Or $\forall j\in I \quad e_j\neq 0_E$, donc $\forall j\in I \quad \|e_j\|\neq 0$, donc $\forall j\in I \quad \lambda_j = 0$.

<u>Définition</u> : Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs est orthonormale (ou orthonormée) si les vecteurs sont unitaires (de norme 1) et deux à deux orthogonaux.

D'après ce qui précède, toute famille orthonormale est libre.
Réciproquement, toute famille libre peut être « orthonormalisée ».

<u>Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt</u> : Si $(e_1,...,e_n)$ est une famille libre de vecteurs, alors il existe une unique famille orthonormale $(u_1,...,u_n)$ de vecteurs qui vérifie :

1. $\forall k\in [\![1,n]\!] \quad \text{Vect}\,(e_1,...,e_k) = \text{Vect}\,(u_1,...,u_k)$.
2. $\forall k\in [\![1,n]\!] \quad <e_k,u_k> \in \mathbb{R}_+^*$.

<u>Démonstration</u> : On raisonne par récurrence.
<u>Initialisation</u> : Pour $n=1$, soit une famille libre (e_1).
Donc : $\text{Vect}\,(e_1) = \text{Vect}\,(u_1) \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \quad u_1 = \lambda e_1$ car $e_1\neq 0_E$ (libre).
Donc : $<e_1,u_1> = <e_1,\lambda e_1> = \lambda <e_1,e_1> = \lambda\|e_1\|^2$, donc $<e_1,u_1>\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \lambda>0$.
Et : $<u_1,u_1> = <\lambda e_1,\lambda e_1> = \lambda^2 <e_1,e_1> = \lambda^2\|e_1\|^2$.
Or la famille (u_1) est orthonormale si et seulement si $\|u_1\| = 1$, donc si $\lambda = \dfrac{1}{\|e_1\|}$.
Donc il existe une unique famille solution : $u_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|}e_1$.

<u>Hérédité</u> : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vérifiée.
Soit $(e_1,...,e_{n+1})$ une famille libre. Il s'agit de trouver une famille orthonormale $(u_1,...,u_{n+1})$ de vecteurs qui vérifie :

1. $\forall k\in [\![1,n+1]\!] \quad \text{Vect}\,(e_1,...,e_k) = \text{Vect}\,(u_1,...,u_k)$.
2. $\forall k\in [\![1,n+1]\!] \quad <e_k,u_k> \in \mathbb{R}_+^*$.

Ceci équivaut à trouver :

- une famille orthonormale $(u_1,...,u_n)$ de vecteurs qui vérifie :
  1. $\forall k\in [\![1,n]\!] \quad \text{Vect}\,(e_1,...,e_k) = \text{Vect}\,(u_1,...,u_k)$.
  2. $\forall k\in [\![1,n]\!] \quad <e_k,u_k> \in \mathbb{R}_+^*$.
- un vecteur u_{n+1} qui vérifie :
  1. $\text{Vect}\,(e_1,...,e_{n+1}) = \text{Vect}\,(u_1,...,u_{n+1})$.
  2. $\forall k\in [\![1,n]\!] \quad <u_k,u_{n+1}> = 0$.
  3. $\|u_{n+1}\| = 1$.

4. $< e_{n+1}, u_{n+1} > \in \mathbb{R}_+^*$.

La famille $(e_1,...,e_n)$ est libre car elle est extraite d'une famille libre. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une unique famille orthonormale $(u_1,...,u_n)$ de vecteurs qui vérifie $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\text{Vect}\,(e_1,...,e_k) = \text{Vect}\,(u_1,...,u_k)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $< e_k, u_k > \in \mathbb{R}_+^*$. Il reste donc à déterminer le vecteur u_{n+1}.

Or $\text{Vect}\,(e_1,...,e_n) = \text{Vect}\,(u_1,...,u_n)$, donc $\text{Vect}\,(e_1,...,e_{n+1}) = \text{Vect}\,(u_1,...,u_n,e_{n+1})$.

Donc la condition 1 est vérifiée ssi : $u_{n+1} \in \text{Vect}\,(u_1,...,u_n,e_{n+1})$, donc ssi : $\exists(\lambda_1,...,\lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $u_{n+1} = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} e_{n+1}$.

Or $(u_1,...,u_n)$ est orthonormale, donc : $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $< u_k, u_{n+1} > = \lambda_k + \lambda_{n+1} < u_k, e_{n+1} >$.

Donc la condition 2 est vérifiée ssi : $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\lambda_k = -\lambda_{n+1} < u_k, e_{n+1} >$, donc ssi $u_{n+1} = \lambda_{n+1} v$ où $v = e_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} < u_k, e_{n+1} > u_k$.

$v \neq 0_E$ car la famille $(e_1,...,e_{n+1})$ est libre, donc e_{n+1} n'appartient pas à $\text{Vect}\,(e_1,...,e_n)$ donc à $\text{Vect}\,(u_1,...,u_n)$. Donc la condition 3 est vérifiée ssi $|\lambda_{n+1}| = \dfrac{1}{\|v\|}$.

$< e_{n+1}, u_{n+1} > = \lambda_{n+1} < e_{n+1}, v >$. Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $< v, u_k > = < u_k, e_{n+1} > - < u_k, e_{n+1} > \|u_k\|^2$, donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $< v, u_k > = = 0$, donc : $\|v\|^2 = < e_{n+1}, v >$. Donc $< e_{n+1}, u_{n+1} > = \lambda_{n+1}\|v\|^2$.

Donc la condition 4 est vérifiée ssi $\lambda_{n+1} > 0$.

Donc il existe un unique vecteur u_{n+1} solution : $u_{n+1} = \dfrac{1}{\|v\|} v$ où $v = e_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} < u_k, e_{n+1} > u_k$.

Donc il existe une unique famille orthonormale $(u_1,...,u_{n+1})$ solution.

Conclusion : La propriété est démontré pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans la pratique : On commence par déterminer une famille orthogonale que l'on norme ensuite. On pose $u_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|} e_1$, puis $\forall k \geq 2$ $v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} < u_i, e_k > u_i$ et $u_k = \dfrac{1}{\|v_k\|} v_k$.

On verra que les coefficients correspondent à la projection orthogonale de e_k sur le sous-espace $\text{Vect}\,(u_1,...,u_{k-1})$.

Exercice : Pour chacun des exemples de produit scalaire, vérifier que la famille donnée est libre, et l'orthonormaliser :

Exemple 1 : $e_1 = (0,1,1)$, $e_1 = (1,0,1)$ et $e_1 = (1,1,0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

Exemple 2 : $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$ sur $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Exemple 3 : $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $E = \mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$.

3) Base orthonormale

Si la famille $(e_1,...,e_n)$ est une base, on parle de base orthonormale (ou orthonormée).

Tout espace euclidien est de dimension finie, donc possède une base que l'on peut orthonormaliser. On obtiendra une famille libre ayant le même nombre de vecteurs, donc une base. Donc :

Théorème : Tout espace euclidien possède une base orthonormale (ou orthonormée).
Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

On complète la famille orthonormale (donc libre) en une base, et on orthonormalise cette base. Par construction, les premiers vecteurs sont conservés.

Par construction, sur une base orthonormale, la matrice associée au produit scalaire est la matrice identité.

Donc sur une base $(e_1,...,e_n)$ orthonormale : $<x,y>={}^tXY=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Et donc, si $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormale : $<x,e_k>=x_k$.

Donc sur une base $(e_1,...,e_n)$ orthonormale : $x=\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>e_k$.

On en déduit une expression de la matrice d'un endomorphisme u car le coefficient $a_{i,j}$ de sa matrice est la i-ème composante de $u(e_j)$.

Conséquence : Si $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormale de E, et si u est un endomorphisme de E, sa matrice A a pour coefficients $a_{i,j}=<e_i,u(e_j)>$, et donc sa trace est : $Tr(u)=Tr(A)=\sum_{k=1}^{n}<e_k,u(e_k)>$.

4) Orthogonalité de deux parties

Définition : Deux parties non vides A et B de E sont orthogonales si :

$$\forall (x,y)\in A\times B \quad <x,y>=0.$$

Tout vecteur de A est orthogonal à tous les vecteurs de B.

Définition : On appelle orthogonal d'une partie non vide A de E l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A : $A^{\perp}=\{x\in E/\forall y\in A \quad <x,y>=0\}$.
En particulier : $\{0_E\}^{\perp}=E$ et $E^{\perp}=\{0_E\}$.

En effet : 0_E est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E.

Exercice : Pour chacun des exemples précédents, déterminer l'orthogonal de A :

Exemple 1 : $A=\left\{x\in E/\sum_{k=1}^{n}x_k=0\right\}$.

Exemple 2 : $A=\{1,X\}$.

Exemple 3 : $A=\{I_n\}$.

Propriété : Pour toute partie non vide A de E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

En effet, $0_E\in A^{\perp}$ et $A^{\perp}$ est stable par combinaison linéaire à cause de la linéarité du produit scalaire.

Théorème : Pour toute forme linéaire φ sur un espace euclidien E, il existe un unique $a\in E$ tel que : $\forall x\in E \quad \varphi(x)=<x,a>$.
Conséquence 1 : L'application qui à $a\in E$ associe la forme linéaire φ : $x\mapsto <x,a>$ est un isomorphisme entre E et son dual E^*.
Conséquence 2 : L'orthogonal d'un vecteur non nul de E est un hyperplan de E.
Réciproquement, tout hyperplan de E est l'orthogonal d'au moins un vecteur non nul.

Démonstration : Soit $(e_1,...,e_n)$ une base orthonormale de E et φ une forme linéaire.

Existence : $\forall x\in E \quad \varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>\varphi(e_k)=<x,\sum_{k=1}^{n}\varphi(e_k)e_k>$.

Donc il existe $a=\sum_{k=1}^{n}\varphi(e_k)e_k$ tel que $\forall x\in E \quad \varphi(x)=<x,a>$.

Unicité : supposons que : $\forall x\in E \quad \varphi(x)=<x,a>=<x,b>$.

Donc $\forall x\in E \quad <x,a-b>=0$. Donc, pour $x=a-b$: $\|a-b\|^2=0$, donc $a=b$.

La conséquence 1 est évidente par linéarité à droite du produit scalaire.
La conséquence 2 est évidente car le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Si $H=\{a\}^{\perp}$, on dira que a est un vecteur normal à H.

<u>Propriété</u> : Pour toutes parties non vides A et B de E :
- $A \cap A^{\perp} \subset \{0_E\}$.
- $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- $\mathrm{Vect}(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

<u>Démonstration</u> :
- Seul le vecteur nul est orthogonal à lui-même. Donc $A \cap A^{\perp} \subset \{0_E\}$.
- On suppose que $A \subset B$. Alors, si $x \in B^{\perp}$: $\forall y \in B \quad <x,y> = 0$.
  Donc en particulier : $\forall y \in A \quad <x,y> = 0$, donc $x \in A^{\perp}$. Donc $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- $\forall x \in A^{\perp} \quad \forall y \in A \quad <x,y> = 0$, donc $\forall y \in A \quad \forall x \in A^{\perp} \quad <y,x> = 0$.
  Donc $\forall y \in A \quad y \in (A^{\perp})^{\perp}$, donc $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$. Donc $\mathrm{Vect}(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$ car $(A^{\perp})^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel.

<u>Attention</u> ! On a toujours $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$, mais il n'y a pas toujours égalité.
De même : $A^{\perp} = B^{\perp}$ ne prouve pas $A = B$.
<u>Exemple</u> : En dimension 3 dans une base orthonormale, si u et v sont deux vecteurs de E, l'application $x \mapsto \det(u,v,x)$ est une forme linéaire sur E. Donc il existe un unique $a \in E$ tel que : $\forall x \in E \quad \det(u,v,x) = <a,x>$. C'est le produit vectoriel $a = u \wedge v$.

5) <u>Sous-espaces vectoriels orthogonaux</u>

<u>Remarque</u> : L'orthogonal de F est noté $F^{\perp}$ ou F^{0}.
Dans le cas des sous-espaces vectoriels, on a d'autres propriétés :

<u>Théorème</u> : Si E est un espace vectoriel préhilbertien et si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires : $E = F \oplus F^{\perp}$.
On dira que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F.

<u>Démonstration</u> : La propriété est évidente si $F = \{0_E\}$ ou si $F = E$.
Dans les autres cas, si $\dim F = p$, F admet une base orthonormale $(e_1,\dots,e_p)$.

Soit $x \in E$. Soit $y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$ un élément de F et $z = x - y$.

Donc $<z,e_j> = <x,e_j> - <y,e_j> = <x,e_j> - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k <e_j,e_k> = <x,e_j> - \lambda_j$.

Donc si $\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \lambda_j = <x,e_j>$, alors $z \in F^{\perp}$.

Donc $x \in E$ se décompose en $x = y + z$ avec $y = \sum_{k=1}^{p} <x,e_k> e_k$ dans F et $z \in F^{\perp}$.

Donc $E = F + F^{\perp}$. De plus $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$, donc $E = F \oplus F^{\perp}$.
$F^{\perp}$ est le <u>seul</u> supplémentaire de F qui lui soit orthogonal (ce qui justifie le nom).
En effet, si $E = F \oplus G$, il existe une base de E qui est réunion d'une base $(e_1,\dots,e_p)$ de F et d'une base $(e_{p+1},\dots,e_n)$ de G. Et si G est orthogonal à F, les vecteurs $(e_{p+1},\dots,e_n)$ sont tous orthogonaux à F, donc appartiennent à $F^{\perp}$. Donc G est inclus dans $F^{\perp}$ et a même dimension $n - p$. Donc $G = F^{\perp}$.

<u>Théorème</u> : Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n et si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :
- $\dim F + \dim F^{\perp} = n$.
- $F = (F^{\perp})^{\perp}$.
- $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
- $(F \cup G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
- $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

Démonstration :

- $\dim F + \dim F^\perp = n$ car $E = F \oplus F^\perp$.
- On sait déjà que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Et $\dim F = \dim (F^\perp)^\perp$ car $E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$.
- $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$.

  Donc : $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

  Inversement, si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, il est orthogonal à tout vecteur de F et à tout vecteur de G, donc à toute somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, donc à tout vecteur de $F+G$. Donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
- $F+G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$, donc $(F \cup G)^\perp = (F+G)^\perp$.
- Soit $x \in F^\perp + G^\perp$. Donc $x = a+b$ avec $a \in F^\perp$ et $b \in G^\perp$.

  Donc : $\forall y \in F \cap G \quad <x,y> = <a,y> + <b,y>$.

  Or $<a,y> = 0$ car $y \in F$ et $<b,y> = 0$ car $y \in G$. Donc $\forall y \in F \cap G \quad <x,y> = 0$.

  Donc $x \in (F \cap G)^\perp$. Donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

  De plus, si $\dim F = p$, $\dim G = q$ et $\dim F \cap G = r$, alors $\dim(F+G) = p+q-r$.

  $\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) = \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F+G)^\perp$.

  Donc $\dim(F^\perp + G^\perp) = (n-p) + (n-q) - [n-(p+q-r)] = n-r = \dim(F \cap G)^\perp$.

  Donc $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Conséquence : Puisque les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires, on peut définir la projection sur F suivant $F^\perp$ et la symétrie par rapport à F suivant $F^\perp$.

Définition : On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F suivant $F^\perp$.

Elle a évidemment toutes les propriétés des projections, et quelques propriétés particulières :

Propriétés : Si p est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F, alors :

- $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.
- $\forall (x,y) \in E^2 \quad < p(x), y > = < x, p(y) >$.
- $\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad \|x - p(x)\| \leq \|x - y\|$.
- $\|x - p(x)\| = d(x,F)$.

Démonstration :

- $\forall x \in E \quad x = p(x) + [x - p(x)]$ où $p(x) \in F$ et $[x - p(x)] \in F^\perp$.

  Donc : $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$, donc $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$, donc $\|x\| \geq \|p(x)\|$.
- $\forall x \in E \quad x = p(x) + [x - p(x)]$ et $\forall y \in E \quad y = p(y) + [y - p(y)]$.

  Donc $< p(x), y > = < p(x), p(y) > + < p(x), y - p(y) >$.

  Or $p(x) \in F$ et $[y - p(y)] \in F^\perp$, donc $< p(x), y > = < p(x), p(y) >$.

  Et par symétrie : $< x, p(y) > = < p(x), p(y) > = < p(x), y >$.
- $\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad x - y = [x - p(x)] + [p(x) - y]$. Or $[x - p(x)] \in F^\perp$ et $[p(x) - y] \in F$.

  Donc $\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2$, donc $\|x - y\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2$.
- $\|x - p(x)\| = d(x,F)$ est le minimum de la distance de x aux éléments y de F.

  Donc : $\|x - p(x)\| = d(x,F)$. Et $p(x)$ est le seul point où ce minimum est atteint.

Conséquences : Si $(e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormale de F :

- $\forall x \in E \quad p(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, e_k > e_k$.
- Inégalité de Bessel : $\forall x \in E \quad \sum_{k=1}^{p} (< x, e_k >)^2 \leq \|x\|^2$.

En effet : $\forall x \in E \quad p(x) \in F$ donc $\forall x \in E \quad p(x) = \sum_{k=1}^{p} < p(x), e_k > e_k$.

Donc $\forall x \in E \quad p(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, p(e_k) > e_k = \sum_{k=1}^{p} < x, e_k > e_k$.

Donc $\forall x \in E \quad \|p(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (< x, e_k >)^2$, d'où l'inégalité car $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \le \|x\|$.

Exercice : Calculer le minimum de $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ pour a et b réels.

On remarque que $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|X^2 - aX - b\|^2$ pour le produit scalaire $< P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$. Donc $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ sera minimum quand $\|X^2 - (aX + b)\|$ le sera. Or cette norme représente la distance entre le polynôme X^2 et un élément quelconque du sous-espace $F = \mathbb{R}_1[X]$.
Donc ce minimum est atteint ssi $aX + b$ est le projeté orthogonal de X^2 sur F.
F a pour base $(1, X)$ que l'on orthonormalise en $(1, \sqrt{3} - 2X\sqrt{3})$.
Donc : $p(X^2) = < X^2, 1 > + < X^2, \sqrt{3} - 2X\sqrt{3} > (\sqrt{3} - 2X\sqrt{3})$.
Donc : $p(X^2) = < X^2, 1 > + 3 < X^2, 1 - 2X > (1 - 2X)$.
Or $< X^2, 1 > = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ et $< X^2, 1 - 2X > = \int_0^1 t^2 (1 - 2t) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.
Donc le projeté orthogonal de X^2 sur F est $p(X^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1 - 2X) = X - \frac{1}{6}$.
Et le minimum cherché est : $\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)^2 dt = \frac{1}{180}$.

Définition : On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F suivant $F^\perp$.
Si F est un hyperplan, la symétrie orthogonale par rapport à F est appelée réflexion.

Elle a évidemment toutes les propriétés des symétries, et quelques propriétés particulières :

Propriétés : Si s est la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F, alors :
- $\forall x \in E \quad \|s(x)\| = \|x\|$.
- $\forall (x, y) \in E^2 \quad < s(x), y > = < x, s(y) >$.

Démonstration : On utilise $s = 2p - Id$ où p est la projection orthogonale.

- $\forall x \in E \quad s(x) = p(x) + [p(x) - x]$ où $p(x) \in F$ et $[p(x) - x] \in F^\perp$.
  Donc : $\|s(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|p(x) - x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2$, donc $\|s(x)\| = \|x\|$.
- $\forall x \in E \quad x = p(x) + [x - p(x)]$ et $\forall y \in E \quad y = p(y) + [y - p(y)]$.
  Donc $< s(x), y > = 2 < p(x), y > - < x, y > = 2 < x, p(y) > - < x, y > = < x, s(y) >$.

IV - Endomorphismes

1) Adjoint d'un endomorphisme

Théorème : Etant donné un endomorphisme u d'un espace euclidien E, il existe un unique endomorphisme u^* de E tel que : $\forall (x, y) \in E^2 \quad < u(x), y > = < x, u^*(y) >$.

Définition : Cet endomorphisme u^* s'appelle l'adjoint de l'endomorphisme *u*.

Démonstration : Soit $(e_1,...,e_n)$ une base orthonormée de *E*.

La matrice *A* de *u* dans cette base est $A=(a_{i,j})$ avec $a_{i,j}=<e_i,u(e_j)>$.

Donc $\forall(x,y)\in E^2 \quad <u(x),y>={}^t(AX)Y={}^tX({}^tAY)=<x,u^*(y)>$ où u^* est l'endomorphisme de *E* de matrice ${}^tA$. Il reste à montrer l'unicité.

Supposons deux endomorphismes solutions : u^* et u^{**}.

Donc $\forall(x,y)\in E^2 \quad <x,u^*(y)>=<x,u^{**}(y)>$, donc $<x,u^*(y)-u^{**}(y)>=0$.

Donc $\forall y\in E \quad u^*(y)-u^{**}(y)=0_E$ car il est orthogonal à tous les vecteurs de *E*.

Donc $\forall y\in E \quad u^*(y)=u^{**}(y)$, donc $u^*=u^{**}$.

Exemples : Les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont égales à leur adjoint. On dira qu'elles sont autoadjointes.

Propriétés : Si *A* est la matrice de *u* dans une base orthonormale, la matrice de u^* dans la même base est ${}^tA$.

Conséquences : $(u^*)^*=u$, $\text{rg}(u)=\text{rg}(u^*)$, $\text{tr}(u)=\text{tr}(u^*)$, $\det(u)=\det(u^*)$.

$u\mapsto u^*$ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et $(u\circ v)^*=v^*\circ u^*$.

u est un automorphisme ssi u^* est un automorphisme. Et $(u^*)^{-1}=(u^{-1})^*$.

u et u^* ont les mêmes valeurs propres et même polynôme caractéristique.

$\text{Ker}(u^*)=(\text{Im}\,u)^\perp$ et $\text{Im}(u^*)=(\text{Ker}\,u)^\perp$.

Démonstration : Les premières sont les propriétés de la transposition des matrices.

$x\in\text{Ker}(u^*)\Leftrightarrow u^*(x)=0_E$, donc $x\in\text{Ker}(u^*)\Leftrightarrow \forall y\in E \quad <y,u^*(x)>=0$.

Donc $x\in\text{Ker}(u^*)\Leftrightarrow \forall y\in E \quad <u(y),x>=0$, donc $x\in\text{Ker}(u^*)\Leftrightarrow x\in(\text{Im}\,u)^\perp$.

Donc $\text{Ker}(u^*)=(\text{Im}\,u)^\perp$ et en appliquant à u^* : $\text{Ker}(u)=(\text{Im}\,u^*)^\perp$, donc $\text{Im}(u^*)=(\text{Ker}\,u)^\perp$.

Théorème : Un sous-espace vectoriel *F* est stable par *u* si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration : Soit *F* un sous-espace stable par *u*. Donc $\forall x\in F \quad u(x)\in F$.

Donc $\forall y\in F^\perp \quad \forall x\in F \quad <u(x),y>=0$, donc $<x,u^*(y)>=0$.

Donc $\forall y\in F^\perp \quad u^*(y)\in F^\perp$. Donc $F^\perp$ est stable par u^*.

L'équivalence est obtenue en appliquant ce qui précède à $F^\perp$ et u^*.

En particulier, un hyperplan de vecteur normal *a* est stable par *u* si et seulement si *a* est un vecteur propre de u^*, ou encore un vecteur non nul *a* est vecteur propre de *u* si et seulement si son hyperplan orthogonal est stable par u^*.

2) Endomorphisme autoadjoint

Définition : Un endomorphisme *u* de *E* est autoadjoint (ou symétrique) si $u^*=u$.

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de *E* est noté $\mathscr{S}(E)$.

Définitions équivalentes :

Un endomorphisme *u* est autoadjoint ssi $\forall(x,y)\in E^2 \quad <u(x),y>=<x,u(y)>$.

Un endomorphisme est autoadjoint ssi sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Exemples : Les projections orthogonales et les symétries orthogonales.

Un projecteur est autoadjoint si et seulement si il s'agit d'une projection orthogonale.

En effet, soit *p* est un projecteur autoadjoint par rapport à *F* parallèlement à *G*.

$\forall(x,y)\in F\times G \quad <x,y>=<p(x),y>=<x,p(y)>=<x,0_E>=0$. Donc $G=F^\perp$.

Tout projecteur autoadjoint est orthogonal.

Si $\dim E=n$, alors $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et $\dim\mathscr{S}(E)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ car les matrices sont symétriques.

Propriété : Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration : Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de *u*.

$\forall x \in E_\lambda \quad \forall y \in E_\mu \quad < u(x), y > = \lambda < x, y >$ et $< x, u(y) > = \mu < x, y >$.

Or *u* est autoadjoint. Donc $\forall x \in E_\lambda \quad \forall y \in E_\mu \quad (\lambda - \mu) < x, y > = 0$, donc $< x, y > = 0$.

Propriété : Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien possède au moins une valeur propre réelle.

Démonstration : Soit *u* un endomorphisme autoadjoint de matrice $A = {}^tA$ dans une base orthonormale. Il a au moins une valeur propre λ éventuellement complexe car son polynôme caractéristique a au moins une racine complexe. Soit *x* un vecteur propre associé et *X* sa matrice. On a $u(x) = \lambda x$ et $AX = \lambda X$.

Notons $\overline{X}$ la matrice dont les éléments sont les conjugués de ceux de *X*.
Comme *A* est une matrice symétrique réelle, on a : $A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, donc ${}^t\overline{X}A = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}$.
Donc : ${}^t\overline{X}AX = \lambda {}^t\overline{X}X$ et ${}^t\overline{X}AX = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$. Donc $(\lambda - \overline{\lambda}){}^t\overline{X}X = 0$.

Or si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors ${}^t\overline{X}X = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \neq 0$. Donc $\lambda = \overline{\lambda}$. Donc λ est réelle.

Conséquence : Toutes les valeurs propres de *u* sont réelles.

Théorème spectral : Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable en base orthonormale.
Corollaire : Tout matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Démonstration : Notons λ_1, ..., λ_p les valeurs propres de *u*, et E_1, ..., E_p les sous-espaces propres associés.
Soit $F = E_1 \oplus ... \oplus E_p$ (somme directe car les valeurs propres sont distinctes).
F est stable par *u* car tous les sous-espaces propres sont stables.
Donc $F^\perp$ est stable par $u^* = u$. Donc $u_{/F^\perp}$ est un endomorphisme autoadjoint de $F^\perp$, donc si $F^\perp \neq \{0_E\}$, il possède au moins une valeur propre réelle et donc au moins un vecteur propre qui sera aussi vecteur propre de *u*. Or c'est impossible puisque $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Donc $F^\perp = \{0_E\}$ et $F = E$.
Donc *u* est diagonalisable car $E = E_1 \oplus ... \oplus E_p$.
Dans chaque sous-espace propre, on peut choisir une base orthonormale de vecteurs propres, et donc la réunion de ces bases est une base orthonormale de *E*.

3) Endomorphismes orthogonaux

Définition : Un endomorphisme *u* de *E* est orthogonal si $u^* \circ u = u \circ u^* = Id_E$.
L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de *E* est un sous-groupe de $GL(E)$ appelé groupe orthogonal de *E* et noté $\mathcal{O}(E)$.
Définitions équivalentes :
1. Un endomorphisme *u* est orthogonal ssi *u* est bijectif et $u^{-1} = u^*$.
2. Un endomorphisme *u* est orthogonal ssi : $\forall (x, y) \in E^2 \quad < u(x), u(y) > = < x, y >$.
3. Un endomorphisme *u* est orthogonal ssi : $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$.
4. Un endomorphisme *u* est orthogonal ssi *u* transforme une (toute) base orthonormale en une base orthonormale.

Démonstration :
On a vu que $\mathcal{O}(E) \neq \varnothing$ et, de manière évidente, la composée de deux endomorphismes orthogonaux est un endomorphisme orthogonal.
- L'équivalence avec 1 est évidente. C'est la définition de la bijectivité et de la réciproque.

Donc $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$. De plus $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$ car $\mathcal{O}(E)$ contient Id_E.
La composée de deux endomorphismes orthogonaux est un endomorphisme orthogonal car : $(v \circ u)^* \circ (v \circ u) = u^* \circ v^* \circ v \circ u = u^* \circ Id_E \circ u = u^* \circ u = Id_E$ si u et v sont orthogonaux.
Et si u est orthogonal, sa réciproque $u^{-1} = u^*$ est orthogonal car $(u^*)^* = u$.

- Si u est orthogonal, il conserve le produit scalaire car :
  $\forall (x,y) \in E^2 \quad < u(x), u(y) > = < x, (u^* \circ u)(y) > = < x, y >$.
  Réciproquement si u conserve le produit scalaire : $\forall (x,y) \in E^2 \quad < u(x), u(y) > = < x, y >$.
  Or $\forall (x,z) \in E^2 \quad < u(x), z > = < x, u^*(z) >$.
  Donc : $\forall (x,y) \in E^2 \quad < u(x), u(y) > = < x, (u^* \circ u)(y) >$, donc $< x, y > = < x, (u^* \circ u)(y) >$.
  Donc : $\forall y \in E \quad (u^* \circ u)(y) = y$ puisque l'égalité est vraie pour tout x.
  Donc $u^* \circ u = Id_E$. Donc u est orthogonal.
- Si u est orthogonal, il conserve le produit scalaire, donc la norme.
  Réciproquement, si u est un endomorphisme qui conserve la norme :
  $$< u(x), u(y) > = \frac{1}{2}\left[\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = < x, y >$$
  car u est linéaire donc $u(x) + u(y) = u(x + y)$.
  Donc u conserve le produit scalaire, donc est orthogonal.
- Il est évident que si u est orthogonal, il conserve le produit scalaire et la norme, donc transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.
  Réciproquement si u est un endomorphisme qui transforme la base orthonormale $(e_1, ..., e_n)$ en base orthonormale $(u(e_1), ..., u(e_n))$, alors :
  $$\forall x \in E \quad x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, e_k >)^2 .$$
  Donc $u(x) = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > u(e_k)$ et $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, e_k >)^2 = \|x\|^2$.

<u>Remarque</u> : Toute application de E dans E qui conserve le produit scalaire est linéaire.
En effet, pour tous x et y de E, et tout λ réel :
$$\|u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y)\|^2 = \|u(\lambda x + y)\|^2 + \lambda^2 \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2\lambda < u(\lambda x + y), u(x) > - 2 < u(\lambda x + y), u(y) > + 2\lambda < u(x), u(y) >$$
Or u conserve le produit scalaire, donc la norme. Donc :
$$\|u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y)\|^2 = \|\lambda x + y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\lambda < \lambda x + y, x > - 2 < \lambda x + y, y > + 2\lambda < x, y > = 0$$
Donc $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.
Par contre, la linéarité est indispensable pour les autres définitions.
<u>Exemple</u> : Si $\dim E = 1$, les seuls endomorphismes orthogonaux sont $\pm Id_E$.
<u>Exemple</u> : La symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F est un endomorphisme orthogonal. En effet, tous les vecteurs x et y de E se décomposent en $x = x_F + x_{F^\perp}$ et $y = y_F + y_{F^\perp}$, et l'on a : $s(x) = x_F - x_{F^\perp}$ et $s(y) = y_F - y_{F^\perp}$.
Donc : $< s(x), s(y) > = < x_F - x_{F^\perp}, y_F - y_{F^\perp} > = < x_F, y_F > + < x_{F^\perp}, y_{F^\perp} > = < x, y >$.
<u>Exemple</u> :

<u>Théorème</u> : Si u est un endomorphisme orthogonal de E, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

En effet, si λ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé : $u(x) = \lambda x$.
Donc $\|u(x)\| = |\lambda| \|x\|$. Or u conserve la norme et $x \neq 0_E$. Donc $|\lambda| = 1$.

<u>Corollaire</u> : Un endomorphisme u est orthogonal si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormale est inversible et vérifie $A^{-1} = {}^t A$.

En effet, la matrice de u^* est ${}^tA$.

Définition : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie ${}^tAA = I_n$.
Elle est donc inversible et son inverse est $A^{-1} = {}^tA$.
L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Un endomorphisme u de E est un endomorphisme orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.
Et toute matrice de changement de bases orthonormales est une matrice orthogonale.

Théorème : Si A est une matrice orthogonale, alors : $\det A = \pm 1$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| = 1\}$.

La première égalité est évidente car $\det {}^tA = \det A$.
Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Donc $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
La matrice A est réelle, donc $A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, donc ${}^t\overline{X}\,{}^tA = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$. Donc ${}^t\overline{X}\,{}^tAAX = \lambda\overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}X$.
Or ${}^tAA = I_n$. Donc $(1 - \lambda\overline{\lambda})\,{}^t\overline{X}X = 0$. Donc $\lambda\overline{\lambda} = 1$ car $X \neq 0$. Donc $|\lambda| = 1$.
La réciproque de ce théorème est évidemment fausse.

Définition : On appelle rotation tout endomorphisme orthogonal u tel que $\det u = +1$.
L'ensemble des rotations est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal et noté $SO(E)$.

En effet, $SO(E) \neq \varnothing$ car Id_E est une rotation, la composée de deux rotations est une rotation car $\det(u \circ v) = (\det u)(\det v)$, et la réciproque d'une rotation est une rotation car $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Remarque : L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant -1 n'est pas un groupe car la composition n'est pas interne.

4) Endomorphismes orthogonaux en dimension 2

Soit A une matrice orthogonale d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que ${}^tAA = I_2$.

Les vecteurs colonnes de A sont unitaires et orthogonaux (base orthonormale).

Donc $\exists ! \theta \in]-\pi, \pi]$ $\quad a + ib = e^{i\theta}$ et $c + id = \pm i e^{i\theta}$, donc $\begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases}$ ou $\begin{cases} c = b \\ d = -a \end{cases}$.

Théorème : Une matrice carrée d'ordre 2 est orthogonale si et seulement si elle est de la forme $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est unique modulo 2π.

Dans le premier cas $\det A = +1$ et dans le second cas $\det A = -1$.

Théorème : Soit u un endomorphisme orthogonal de matrice A dans une base orthonormale (e_1, e_2).
Si sa matrice est de la forme $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, u est la rotation d'angle de mesure θ.
Si sa matrice est de la forme $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, u est la réflexion par rapport à la droite D de base $\sin\dfrac{\theta}{2}e_1 + \cos\dfrac{\theta}{2}e_2$.

En effet, dans le deuxième cas A est symétrique et $A^2 = I_2$, donc $u \circ u = Id_E$, donc u est une symétrie, de plus $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + Id_E)$ sont orthogonaux.
On peut remarquer qu'en dimension 2 le groupe $SO(E)$ est commutatif : la composée des rotations d'angles θ et θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

D'autre part, la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion. Donc toute rotation est composée de deux réflexions.

Théorème : En dimension 2, tout endomorphisme orthogonal est composé d'une ou deux réflexions.

5) Endomorphismes orthogonaux en dimension 3

On sait que : $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$. Soit $F = \{x \in E / u(x) = x\}$ l'ensemble des vecteurs invariants ou encore le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 si $1 \in \mathrm{Sp}(u)$.

F est un sous-espace vectoriel de E et $\dim F \leq 3$. Et $\dim F^{\perp} = 3 - \dim F$.

De plus, les restrictions de u à F et à $F^{\perp}$ sont des endomorphismes orthogonaux.

1er cas : $\dim F = 3$.

Donc $u = Id_E$ et $u \in SO(E)$.

2ème cas : $\dim F = 2$, donc $\dim F^{\perp} = 1$.

Donc $u_{/F}$ est Id_F, et $u_{F^{\perp}} = -Id_{F^{\perp}}$ (aucun vecteur non nul de $F^{\perp}$ n'est invariant).

Donc u est la réflexion par rapport à F et il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E où la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3ème cas : $\dim F = 1$, donc $\dim F^{\perp} = 2$.

Donc $u_{/F}$ est Id_F, et $u_{F^{\perp}}$ est une rotation car aucun vecteur non nul de $F^{\perp}$ n'est invariant.

Donc il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E où la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et u est la rotation d'axe F et d'angle θ.

Comme la rotation plane $u_{F^{\perp}}$ est composée de deux réflexions planes par rapport à des droites D_1 et D_2 de $F^{\perp}$, u est composée de deux réflexions par rapport aux plans $P_1 = \mathrm{Vect}(F, D_1)$ et $P_2 = \mathrm{Vect}(F, D_2)$.

4ème cas : $\dim F = 0$, donc $F^{\perp} = E$.

Soit $a \in E$ et $b = u(a)$. Comme u n'a pas de vecteur invariant, le vecteur $b - a$ est non nul. Soit H le plan de vecteur normal $b - a$ et s_H la réflexion par rapport à H.

u est orthogonal, donc $\|b\| = \|a\|$. Donc $< b + a, b - a > = \|b\|^2 - \|a\|^2 = 0$.

Donc $(b + a) \in H$ et $(b - a) \in H^{\perp}$.

Or : $b = \frac{1}{2}(b + a) + \frac{1}{2}(b - a)$, donc $s_H(b) = \frac{1}{2}(b + a) - \frac{1}{2}(b - a) = a$.

Donc $(s_H \circ u)(a) = a$. Donc $s_H \circ u$ est un endomorphisme orthogonal qui a au moins un vecteur invariant, ce qui nous ramène à l'un des cas précédent.

Ce n'est pas le premier cas, car sinon on aurait $u = s_H$, donc $F = H$.

Ce n'est pas le deuxième cas, car sinon on aurait $u = s_H \circ s_G$ composée de deux réflexions par rapport à des plans, donc $H \cap G \subset F$, donc $H \cap G = \{0_E\}$, ce qui n'est pas possible pour deux plans en dimension 3.

Donc $s_H \circ u$ est une rotation d'axe engendré par a.

Donc u est composé d'une réflexion et d'une rotation, donc de trois réflexions.

Théorème : En dimension 3, tout endomorphisme orthogonal est composé d'une, deux ou trois réflexions.

<u>4ème cas</u> : $\dim F = 0$, donc $F^{\perp} = E$.
Le polynôme caractéristique de *u* est de degré 3, donc a au moins une racine réelle qui n'est pas 1 car $F = \{0_E\}$. Or $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$. Donc (-1) est valeur propre de *u*.
Soit *G* l'orthogonal du sous-espace propre associé à (-1). Donc $\dim G \leq 2$.
Soit s_G la symétrie orthogonale par rapport à *G*. Donc $\forall x \in G \quad s(x) = -x$.
Donc $s \circ u$ est un endomorphisme orthogonal tel que : $\forall x \in G \quad (s \circ u)(x) = x$.
On est donc ramené à l'un des cas précédents car $H = \{x \in E / (s \circ u)(x) = x\}$ contient *G*, donc est de dimension supérieure ou égale à 1.
Si $\dim H = 3$, alors $s \circ u = Id_E$, donc $u = s$, donc $F = G^{\perp} = \{0_E\}$, donc $G = E$, donc $u = -Id_E$.
Si $\dim H = 2$, alors $s \circ u = s_H$ réflexion par rapport à *H*. Donc $u = s \circ s_H$