Chapitre 9. Variables à densité

Table des matières

1 Rappels

On suppose défini un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, associé à une certaine expérience aléatoire.

1.1 Variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle X est une application de Ω vers $\mathbb{R}$, telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire, $X^{-1}(I)$ est un événement.

Exemple : On tire une fléchette sur une cible formée d'un disque de centre O et de rayon r. L'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire est l'ensemble Ω des points du disque (on ne compte que les cas où la flèche arrive effectivement sur la cible !).
Soit X la distance de O au point d'impact de la fléchette : X est une variable aléatoire, avec $X(\Omega) = [0, r[$.
$X^{-1}\left(\left[0, \frac{r}{2}\right]\right)$ est l'événement : $\{0 \leq X \leq \frac{r}{2}\}$, autrement traduit par : "la fléchette arrive dans le disque central de centre O et de rayon $\frac{r}{2}$".

1.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers [0,1] définie par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Propriétés :

a) F est ***croissante*** sur $\mathbb{R}$.
En effet, si $x_1 \leq x_2$, $P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$, d'où : $P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2)$: on a bien $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

b) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad$ *avec* $\quad a < b, \qquad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

c) Pour une variable quelconque X, plus x est "grand" plus l'évenement $\{X \leq x\}$ est probable, et inversement plus x est "petit", moins l'événement $\{X \leq x\}$ est probable :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \qquad et \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

2 Fonction de répartition et densité d'une variable absolument continue

2.1 Définitions

Définition 1 : Soit X une variable aléatoire, et F sa fonction de répartition. Si F est ***continue*** sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points isolés, X est dite *absolument continue*.

Définition 2 : Soit X une variable aléatoire absolument continue, et F sa fonction de répartition. Soit f une fonction telle que, en tout point où F est dérivable, $F'(x) = f(x)$. Alors f est une ***densité de probabilité*** de X.

Remarque : Comme f est alors continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points isolés : f est ***continue par morceaux*** sur $\mathbb{R}$.
De plus, F est une primitive de f.

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire absolument continue, de densité de probabilité f. Son ***ensemble de valeurs*** est l'ensemble des réels x tels que $f(x) \neq 0$.
Remarque : Comme f est continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points isolés) $X(\Omega)$ est soit un intervalle de $\mathbb{R}$, soit une réunion d'intervalles.

2.2 Propriétés

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad$ *avec* $\quad a < b, \qquad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$
2. Comme F est croissante sur $\mathbb{R}$, f est *positive ou nulle* sur $\mathbb{R}$.
3. ***Théorème 1 :*** $\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$

   Conséquence : L'intégrale de f sur $]-\infty, x]$ est convergente, et en particulier : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

4. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$.

   L'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est donc convergente et : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1}$

   et en particulier : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

5. Comme f est une fonction positive, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, et donc $P(a < X \leq b)$, est l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
6. Soit un réel a de $X(\Omega)$: $\qquad P(X = a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0.$
   On a donc : $P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$.
7. Supposons que $X(\Omega) = [a,b]$ (la densité de probabilité de X est nulle en dehors de l'intervalle $[a,b]$).
   Alors : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f(t)dt = 1$
   • Si $x \leq a$, $\qquad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
   • Si $x \geq b$, $\qquad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^x 0dt = 1.$

   Théorème 2 : $\boxed{\text{Si } X(\Omega) = [a,b], \text{ alors } \forall x \leq a \quad F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq b \quad F(x) = 1}$

2.3 Condition pour qu'une fonction F donnée soit une fonction de répartition

Théorème 3 :

> Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$.
> Si F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points, croissante sur $\mathbb{R}$, et telle que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
> alors F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X.

Exemple 1 : Soit F la fonction définie par :
• si $x < 0$, $\quad F(x) = 0$
• si $0 \leq x \leq 1$, $\quad F(x) = x$
• si $x > 1$, $\quad F(x) = 1$
Alors F vérifie bien toutes les propriétés nécessaires : F est une fonction de répartition.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F, une densité de X sera obtenue en prenant la dérivée de F partout où celle-ci est dérivable, et en donnant des valeurs quelconques pour les points isolés :
• si $x < 0$, $\quad f(x) = 0$
• si $0 < x < 1$, $\quad f(x) = 1$
• si $x > 1$, $\quad f(x) = 0$
• $f(0) = f(1) = 1$ (par exemple).

On remarque que $X(\Omega) = [0, 1]$.

2.4 Condition pour qu'une fonction f donnée soit une densité de probabilité

Théorème 4 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si :
• f est continue sur $\mathbb{R}$, ou continue par morceaux
• f est positive : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geq 0$
• l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
alors f est une densité de probabilité.

Exemple 2 : Soit f définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0 \quad f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \\ \text{sinon} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

• $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$,donc f est continue par morceaux.
• $\forall x \geq 0 \qquad f(x) > 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}dt$
Or $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = -\frac{1}{1+x} + 1$ donc l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.
Conclusion : f est bien une densité de probabilité.
Soit X une variable de densité f, sa fonction de répartition est donnée par :
• Si $x < 0 \qquad F(x) = 0$
• Si $x \geq 0 \qquad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = 1 - \frac{1}{1+x}$

Exemple 3 : Soit f définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0 \quad f(x) = \dfrac{\alpha}{(1+x)^3} \\ \text{sinon} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

Cherchons s'il existe une valeur de α telle que f soit une densité de probabilité.
• f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et positive si $\alpha \geq 0$.
• Pour que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ soit convergente et de valeur 1, il faut et il suffit que $\alpha = 2$:
en effet $\displaystyle\int_0^x \frac{\alpha}{(1+t)^3}dt = \left[-\frac{\alpha}{2(1+t)^2}\right]_0^x = \alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+x)^2}\right)$, d'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{\alpha}{2}$.
Dans ce cas la fonction de répartition d'une variable X de densité f sera :

$$\begin{cases} \text{si } x < 0 \quad F(x) = 0 \\ \text{si } x \geq 0 \quad F(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} \end{cases}$$

3 Composée d'une variable aléatoire X par une fonction numérique φ

On pose $Y = \varphi(X)$. Dans les exemples suivante, on suppose que X a une densité f, et on cherche une densité g de Y.
On notera F la fonction de répartition de X et G celle de Y.

3.1 $\varphi(x) = ax + b$, avec $a > 0$

On a donc $Y = aX + b$. On considère la fonction de répartition G de Y. Par définition,

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(aX + b \leq x) \\ &= P(X \leq \frac{x-b}{a}) \\ &= F\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

En tout point où F est dérivable, $g(x) = G'(x) = \dfrac{1}{a}F'\left(\dfrac{x-b}{a}\right) = \dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

On a donc : $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)}$

3.2 $\varphi(x) = ax + b$, avec $a < 0$

La seule différence avec le cas précédent, c'est qu'en divisant les deux membres d'une inégalité par $\dfrac{1}{a}$ l'inégalité change de sens :
$G(x) = P(X \geq \dfrac{x-b}{a}) = 1 - P(X < \dfrac{x-b}{a}) = 1 - F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

d'où : $\boxed{g(x) = -\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)}$

Remarque : on peut réunir ces deux cas en un seul : $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{|a|}f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)}$

3.3 $\varphi(x) = x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = P(X^2 \leq x)$. On a alors deux cas :
- Si $x < 0$: $P(X^2 \leq x) = 0$ (événement impossible), donc $G(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
- Si $x > 0$: $P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$

et en dérivant on obtient : $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}))}$

- Si $x = 0$: On peut prendre n'importe quelle valeur pour $g(0)$.

3.4 $\varphi(x) = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = P(e^X \leq x)$. On a alors deux cas :
- Si $x \leq 0$: $P(e^X \leq x) = 0$ (événement impossible), donc $G(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
- Si $x > 0$: $G(x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln x) = F(\ln x)$ et donc : $g(x) = \dfrac{1}{x}f(\ln x)$.

4 Moments d'une variable aléatoire à densité

4.1 Moment d'ordre n de X

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire absolument continue, de densité f, et n un entier strictement positif. X admet un moment d'ordre n si, et seulement si, l'intégrale de la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est convergente sur $\mathbb{R}$.
Dans ce cas on note : $m_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$

4.2 Espérance

Définition 5 : X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale de la fonction $x \mapsto xf(x)$ est convergente sur $\mathbb{R}$, et dans ce cas : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.
(L'espérance n'est autre que le moment d'ordre 1 de X.)

Exemple 1 : On avait : $\begin{cases} \text{si } 0 \leq x \leq 1 & f(x) = 1 \\ \text{sinon} & f(x) = 0 \end{cases}$
Alors : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} tdt + \int_{1}^{+\infty} 0dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
X admet bien une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{2}$
Exemple 2 : $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ sinon.
Comme $\dfrac{t}{(1+t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$, l'intégrale de $t \mapsto tf(t)$ sur $[0, +\infty[$ est divergente.
Donc X n'admet pas d'espérance.

Exemple 3 : $f(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ sinon.
On remarque que : $\dfrac{t}{(1+t)^3} = \dfrac{1}{(1+t)^2} - \dfrac{1}{(1+t)^3}$
d'où : $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3}dt = \int_0^x (\frac{2}{(1+t)^2} - \frac{2}{(1+t)^3})dt = \left[-\frac{2}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^x = 1 - \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$
Donc, en prenant la limite quand x tend vers $+\infty$, $E(X) = 1$

Cas d'une densité de probabilité paire :

Théorème 5 :

> Si X a pour densité de probabilité une fonction paire,
> et si l'intégrale de $t \mapsto tf(t)$ sur $[0, +\infty[$ est convergente,
> Alors : $E(X) = 0$

4.3 Théorème de transfert

Théorème 6 :

> Soit X une variable de densité f, admettant une espérance, et $Y = \varphi(X)$,
> où φ est une fonction numérique. Alors, sous réserve de convergence de cette intégrale,
> $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(t)dt$

On admettra ce théorème dans le cas général, et on va le vérifier dans deux cas.

4.3.1 Cas où $\varphi(x) = ax + b$, avec $a > 0$

On a vu que dans ce cas une densité de $Y = aX + b$ est donnée par : $g(x) = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$
Donc, sous réserve de convergence, $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{a} f\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$
On effectue le changement de variable $u = \dfrac{t-b}{a}$, d'où $dt = adu$, et comme $a > 0$ les bornes restent inchangées :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (au + b)f(u)du$$

On a bien l'expression du théorème de transfert dans le cas $Y = aX + b$, et de plus, par linéarité de l'intégrale impropre convergente,

$$E(aX + b) = a\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du + b\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du$$

c'est-à-dire :

Théorème 7 : $\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b}$

Remarque : On peut faire le même calcul dans le cas de $a<0$, et on retrouve le résultat du théorème 7, qui est donc valable quelle que soit la valeur de a.

4.3.2 Cas où $\varphi(x) = x^2$

On a vu que dans ce cas une densité de Y est donnée par :
$g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}))$ si $x>0$, $\quad g(x) = 0$ sinon.
Sous réserve de convergence,
$E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\sqrt{t}}(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t}))dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{2} f(\sqrt{t})dt + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{2} f(-\sqrt{t})dt$
On appelle I_1 la première de ces deux intégrales, et I_2 la deuxième.

Calcul de I_1 ***:***
On effectue le changement de variable $u=\sqrt{t}$, d'où $t=u^2$, et $dt = 2udu$, les bornes étant inchangées.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u}{2} f(u) 2udu = \int_0^{+\infty} u^2 f(u)du$$

Calcul de I_2 ***:***
On effectue le changement de variable $u=-\sqrt{t}$, d'où $t=u^2$, et $dt=2udu$.
Quand $t=0$, $u=0$, et quand t tend vers $+\infty$, u tend vers $-\infty$, d'où :

$$I_2 = \int_0^{-\infty} -\frac{u}{2} f(u)2udu = \int_{-\infty}^0 u^2 f(u)du$$

On en déduit : $E(Y) = I_2 + I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^0 u^2 f(u)du + \int_0^{+\infty} u^2 f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)du$
On retrouve bien le résultat du théorème de transfert, pour $\varphi(x) = x^2$.

4.4 Variance

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire à densité, admettant une espérance $E(X)$. La variance de X est le nombre réel, s'il existe,

$$V(X) = E([X-E(X)]^2)$$

Théorème 8 : $\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ (Formule de Koenig-Huyghens)}}$

Définition 7 : L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple 1 : Soit X de densité f définie par :
Si $0 \le x \le 1$, $\quad f(x) = 1$, sinon $f(x) = 0$.
Nous avons vu : $E(X) = \dfrac{1}{2}$
$E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$
d'où : $\quad V(X) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

Exemple 3 : La densité f de X est définie par :
Si $x<0$, $f(x) = 0$ $\quad$ et si $x \ge 0$, $\quad f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$
On avait : $E(X) = 1$.
Sous réserve de convergence, $E(X^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t)^3}dt$

Or : $\dfrac{2t^2}{(1+t)^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{t}$ donc cette intégrale est **divergente**.
La variable X n'admet pas de variance.

Théorème 9 : $V(aX+b) = a^2V(X)$
(sous réserve d'existence de $V(X)$)

4.5 Variables aléatoires centrées réduites

Définition 8 : Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$. Elle est dite **centrée réduite** si $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

Théorème 10 : A toute variable aléatoire X admettant une espérance et une variance, on peut associer une variable centrée réduite : $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

4.6 Covariance

Définition 9 : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

5 Lois usuelles

5.1 Loi uniforme

Définition 10 : La variable X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si la densité de probabilité f de cette variable est **constante** sur l'intervalle $[a,b]$, et nulle en dehors de cet intervalle.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ (ou : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$)

- **Valeur de la constante :**
  Si m est la valeur de la densité sur $[a,b]$, on doit avoir : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, c'est-à-dire :
  $\displaystyle\int_a^b m dt = 1$, soit : $m(b-a) = 1$ d'où $m = \dfrac{1}{b-a}$.
- **Fonction de répartition :**
  • Si $x < a$, $F(x) = 0$
  • Si $x > b$, $F(x) = 1$
  • Si $a \leq x \leq b$, $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$
- **Espérance :**
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \qquad \boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$
- **Variance :**
  $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$
  d'où : $V(X) = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{b^2-2ab+a^2}{12}$ c'est à dire : $\boxed{V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}}$

5.2 Loi exponentielle

Définition 11 : Soit λ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilitéf est donnée par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0 & f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \\ \text{sinon} & f(x) = 0 \end{cases}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

- **Vérifions que f est une densité :**
Sous réserve de convergence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt$
or : $\displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$
Comme $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$, donc on a bien : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
Par ailleurs cette fonction est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, et elle est continue par morceaux. C'est donc bien une densité de probabilité.

- **Fonction de répartition :**
D'après le calcul précédent : $\begin{cases} \text{si } x \geq 0 & F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \\ \text{si } x < 0 & F(x) = 0 \end{cases}$

- **Espérance :**
Sous réserve de convergence, $\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt$
or, en utilisant une intégration par parties :
$\displaystyle\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t}dt = -xe^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$
d'où, en prenant la limite quand x tend vers $+\infty$, $\boxed{E(X) = \dfrac{1}{\lambda}}$

- **Variance :**
Sous réserve de convergence, $\displaystyle E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2\lambda e^{-\lambda t}dt$
Avec une intégration par parties :
$\displaystyle\int_0^x t^2\lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-t^2e^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x 2te^{-\lambda t}dt$
et d'après le calcul précédent :
$\displaystyle\int_0^x t^2\lambda e^{-\lambda t}dt = -x^2e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda^2}$
En prenant la limite quand x tend vers $+\infty$ on obtient : $E(X^2) = \dfrac{2}{\lambda^2}$ d'où : $\boxed{V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$

5.3 Loi normale centrée réduite, ou loi de Laplace-Gauss

Définition 12 : La variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite si et seulement si sa densité de probabilité est la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

- **Etude de la fonction φ :**
$*$ La fonction φ est **paire**, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$*$ $\varphi'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, par conséquent φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction φ admet un maximum au point 0, égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
$*$ $\varphi''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$
par conséquent la courbe représentative de φ admet 2 points d'inflexions, de coordonnées respectives $(1, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}})$ et $(-1, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}})$.

- **φ est bien une densité :**

  On admettra que : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1}$

  Conséquence : On peut en déduire les valeurs d'autres intégrales par changement de variable.
  L'égalité ci-dessus peut s'écrire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$, et en posant $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, $\quad dt = \sqrt{2}du$ et donc :
  $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}du = \sqrt{2\pi}$

  d'où : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}}$ et comme la fonction est paire : $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

- **Espérance**

  On étudie la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt$.
  Comme la fonction φ est paire, la fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ est impaire ; il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale sur $[0, +\infty[$.
  $\displaystyle\int_0^x t\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$
  Comme $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, l'intégrale est convergente et : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

  et comme φ est paire, $\boxed{E(X) = 0}$

- **Variance**

  Pour calculer $E(X^2)$, on remarque que la fonction $t \mapsto t^2\varphi(t)$ est paire. On utilise une intégration par parties, en posant :
  $$\begin{cases} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = t\varphi(t) & v(t) = -\varphi(t) \end{cases}$$
  $\displaystyle\int_0^x t^2\varphi(t)dt = [-t\varphi(t)]_0^x + \int_0^x \varphi(t)dt = -x\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t)dt$
  Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty}\varphi(t)dt = \frac{1}{2}$
  par conséquent : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt = \frac{1}{2}$, d'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)dt = 1$

  et comme $E(X) = 0$, $\boxed{V(X) = 1}$

- **Fonction de répartition**

  On note Φ la fonction de répartition de X : $\quad \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$
  On ne peut exprimer cette fonction à l'aide des fonctions usuelles, mais on trouve ses valeurs à l'aide d'une table (voir annexe).

  Propriétés :

  1. Comme φ est paire, $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$
  2. Pour tout x positif ou nul, $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$.
     On peut alors calculer une valeur approchée de cette intégrale par la méthode des trapèzes, par exemple.
  3. Pour tout réel x, $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$

Cette propriété permet de calculer les valeurs de Φ pour $x < 0$, à partir de la table.
dém : Comme φ est paire, $\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)dt = \int_{x}^{+\infty} \varphi(t)dt = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$

4. Pour tout réel positif a, $\boxed{P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1}$

5.4 Loi normale de paramètres m et σ^2

Soit m un réel, σ un réel strictement positif.

Définition 13 : Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ^2 si $X = m + \sigma T$, où T est une variable qui suit une loi de Laplace-Gauss.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Remarque : Pour $m = 0$ et $\sigma = 1$, on retrouve la loi normale centrée réduite, ou loi de Laplace-Gauss.

- **Densité de probabilité**
  D'après le calcul du paragraphe 3.1, la densité f de X est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

- **Espérance et variance :**

  D'après les formules des théorèmes 7 et 9 : $\boxed{E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2}$

  Les paramètres de la loi sont donc l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

- **Fonction de répartition :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

  On aura par exemple : $P(m - a \leq X \leq m + a) = \Phi\left(\frac{m+a-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-a-m}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1$