Chapitre 7. Intégration

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé

1.1 Rappels sur les primitives

On note f une fonction réelle de variable réelle.

Définition 1 : La fonction f admet pour primitive la fonction F sur l'intervalle I ssi :
$\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x)$

Théorème 1 : •Si f admet une primitive F sur I, toute fonction G telle que $G - F$ est constante est une primitive de f sur I.
• Pour tout couple (x_0, y_0) de $I \times \mathbb{R}$, il existe une unique primitive H de f sur I telle que $H(x_0) = y_0$.

Exemple : La fonction ln est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui prend la valeur 0 en 1.

Théorème 2 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle I. (*admis*)

Définition 2 : L'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ est le nombre réel :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \qquad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a, b].$$

Remarques :

- La continuité de f sur $[a, b]$ garantit l'existence de la primitive F sur $[a, b]$.
- L'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie, puisque la différence entre deux primitives de f est constante.
- Il existe des fonctions composées de fonctions usuelles qui n'admettent pas de primitive pouvant s'exprimer à l'aide de fonctions usuelles : cependant l'intégrale existe, et on peut éventuellement en calculer une valeur approchée.
  Exemple : la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$, admet une primitive sur $\mathbb{R}$, mais on ne peut exprimer cette primitive à l'aide des fonctions usuelles.

1.2 Fonction définie par une intégrale

Théorème 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.
La primitive F de f sur I telle que $F(a) = 0$ est : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Conséquence : Comme f est continue sur I, F est de classe C^1 sur I.

Application : Soit $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$, où u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- F est définie en tout réel x tel que f est continue sur $[u(x), v(x)]$ (ou $[v(x), u(x)]$).
- Soit G une primitive de f sur un intervalle I tel que $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à I. Alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= G(v(x)) - G(u(x)) \\ F'(x) &= v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x)) \\ &= v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \end{aligned}$$

  On établit à partir de ce calcul un tableau de variations de F.

1.3 Méthodes de calcul des intégrales

1.3.1 Utilisation des formules de dérivation usuelles

Si la fonction à intégrer est de la forme f, une de ses primitives est de la forme F :

$$\begin{array}{lll} f = u'u^\alpha & (\alpha \neq -1) & F = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ f = \dfrac{u'}{u} & & F = ln|u| \\ f = u'e^u & & F = e^u \end{array}$$

1.3.2 Intégration par parties

Théorème 4 : Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Remarque : Il faut que u et v soient de classe C^1 pour que les produits de fonctions $u'v$ et uv' soient continus, et donc intégrables sur $[a, b]$.

1.3.3 Changement de variable

Théorème 5 : Soit φ une *bijection* continue de $[a, b]$ vers $[\varphi(a), \varphi(b)]$ (ou $[\varphi(b), \varphi(a)]$) et f continue sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b \varphi'(t)f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

En pratique :

- Repérer la fonction φ telle que $\varphi(t)$ apparaît de façon évidente dans l'intégrale à calculer.
- Poser $x = \varphi(t)$, alors $dx = \varphi'(t)dt$ (ou : $t = \varphi^{-1}(x)$ et $dt = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}dx$)
- Remplacer dans la fonction à intégrer tout ce qui dépend de t par la quantité égale en x.
- Changer les bornes : Si $t = a$, $x = \varphi(a)$, et si $t = b$, $x = \varphi(b)$.
- Calculer la nouvelle intégrale obtenue.

Application : Intégrales de fonctions paires et impaires sur des intervalles $[-a, a]$

Théorème 6 : Soit f continue sur un intervalle $[-a, a]$ $(a \neq 0)$

- Si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

Exemple d'application : $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 - 4x)\sqrt{x^2+1}dx = 0$

1.4 Proriétés des intégrales

1.4.1 Relation de Chasles

Théorème 7 : Pour toute fonction intégrable sur$[a, b]$, et c réel de$[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple d'application : Si f est une fonction continue sur$[0, 1]$:

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt$$

1.4.2 Linéarité de l'intégrale

Théorème 8 : Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, λ et μ deux réels, alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

1.4.3 Positivité de l'intégrale

Théorème 9 : Si f est intégrable sur $[a,b]$, et que $\forall t \in [a,b], \quad f(t) \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

Attention ! Il faut que "les bornes soient dans le bon sens" $(a < b)$.

Conséquence : L'intégrale "conserve l'ordre" :

Théorème 9bis : Si deux fonctions f et g intégrables sur $[a,b]$ $(a < b)$ sont telles que $\forall t \in [a,b], \quad f(t) \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

En particulier :

Théorème 10 : Inégalité de la moyenne

Si f est intégrable sur $[a,b]$, et s'il existe deux réels m et M tels que : $\forall t \in [a,b] \quad m \leq f(t) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

1.4.4 Intégrale et valeur absolue

Théorème 11 : Si f est intégrable sur $[a,b]$, $\quad (a < b) \quad$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$

1.5 Sommes de Riemann

Théorème 12 : Soit f continue sur $[a,b]$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$ et $S'_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(t)dt$$

Cas particulier : Quand $a = 0$ et $b = 1$: $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ et $S'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ et la limite commune de ces deux sommes est : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Exemple : Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^2$.

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert, admettant un prolongement par continuité sur l'intervalle fermé

2.1 Prolongement par continuité

Définition 3 :

Soit f continue sur $]a,b]$; f admet un *prolongement par continuité* sur $[a,b]$ si et seulement si f admet une limite finie quand x tend vers a.
Le prolongement par continuité de f sur $[a,b]$ est alors la fonction g définie par :
$\forall x \in]a,b] \quad g(x) = f(x) \quad$ et $\quad g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Remarque : On définit de même , pour f continue sur $[a,b[$, un éventuel prolongement par continuité de f sur $[a,b]$ en prenant la limite de f en b.

Exemple 1 : Soit f définie par : $\quad \forall x \in]0,1] \quad f(x) = x \ln x$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, f admet un prolongement par continuité g sur $[0,1]$ défini par :
$g(0) = 0 \quad$ et $\quad \forall x \in]0,1] \quad g(x) = x \ln x$.
Etude de la fonction g : Si $x \in]0,1] \qquad g'(x) = \ln x + 1$, et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = -\infty$, donc g n'est pas dérivable en 0 : la courbe de g admet au point $(0,0)$ une demi-tangente verticale.
Calcul de l'intégrale de g sur $[0,1]$: Comme g est **continue** sur $[0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 g(t)dt$ existe.
Pour la calculer on pense à une intégration par parties :

$$u(t) = \ln t \qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$
$$v'(t) = t \qquad v(t) = \frac{t^2}{2}$$

mais u n'est pas de classe C^1 sur $[0,1]$!
Intuitivement, en regardant la courbe représentative de g, on a : $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = \lim_{x \to 0} \int_x^1 g(t)dt$
or pour $x > 0$, u et v sont de classe C^1 sur $[x,1]$, et donc :
$\displaystyle\int_x^1 t \ln t dt = [\frac{t^2}{2} \ln t]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2} dt = -\frac{x^2}{2} \ln x - [\frac{t^2}{4}]_x^1 = -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}$
Comme $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$, $\quad \displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^1 g(t)dt = -\frac{1}{4}$, d'où : $\quad \displaystyle\int_0^1 t \ln t dt = -\frac{1}{4}$

Généralisation :

Théorème 13 :

Soit f continue sur $]a,b]$ admettant un prolongement par continuité sur $[a,b]$ noté $\tilde{f}$, alors f admet une intégrale sur $]a,b]$ et :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

(Analogue si f est continue sur $[a,b[$, admettant un prolongement par continuité sur $[a,b]$.)

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4 :

f est continue par morceaux (ou par intervalles) sur $[a,b]$ si, et seulement si,
il existe une subdivision $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ (avec $x_0 = a$ et $x_n = b$) de l'intervalle $[a,b]$ telle que :
• f est continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[\quad (0 \leq i \leq n-1)$
• La restriction f_i de f à $]x_i, x_{i+1}[$ admet un prolongement par continuité $\tilde{f}_i$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout i tel que $0 \leq i \leq n-1$.

Théorème 14 :

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, f admet une intégrale sur $[a,b]$ définie par :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_i(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)dt$$

En pratique : on utilise la relation de Chasles pour les intégrales.

3 Intégrales généralisées, ou impropres

3.1 Intégrale d'une fonction sur un intervalle semi-ouvert, sans PPC

Exemple 2 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, l'ensemble de définition de f est $]-\infty, 1[$, et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$: f n'admet pas de prolongement par continuité sur $[0,1]$.
Peut-on définir l'intégrale de f sur $[0,1[$?
On considère la fonction F définie sur $]-\infty, 1[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$:
F est une primitive de f. Cherchons sa limite quand $x \to 1$:
$F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \left[-\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^x = -2\sqrt{1-x}+2$
$\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = 2$.
On remarque que cette limite est celle de l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses Ot, et les deux droites d'équations $t=0$ et $t=x$.
On dit que l'intégrale de f sur $[0,1[$ est convergente, et sa valeur est 2.
On écrit alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = 2$.

Définition 5 :

Soit f continue sur $[a,b[$, et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, pour tout réel x de $[a,b[$.
- Si F admet une limite finie en b, on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente, et on note : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$
- Si F n'a pas de limite finie quand $x \to b$, l'intégrale de f sur $[a,b[$ est divergente.

Définition 6 :

Soit f continue sur $]a,b]$, et $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$, pour tout réel x de $]a,b]$.
- Si F admet une limite finie en a, on dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ est convergente, et on note : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)dt$
- Si F n'a pas de limite finie quand $x \to a$, l'intégrale de f sur $]a,b]$ est divergente.

Exemple 3 : Soit $f(t) = \dfrac{1}{t}$. L'intégrale de f sur $]0,1]$ est-elle convergente ?

$\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}dt = -\ln x$, or $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc l'intégrale de f sur $]0,1]$ est divergente.

Remarque : Dans la définition 5, la fonction F est une primitive de f alors qu'elle ne l'est pas dans la définition 6.

Exemple 4 : Soit α un réel strictement positif , $\alpha \neq 1$, et $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$.
L'intégrale de f_α sur $]0,1]$ est-elle convergente ?
$\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_x^1 t^{-\alpha}dt = [\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_x^1 = \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

- Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{-\alpha+1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$: l'intégrale est donc *divergente*.
- Si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{1-\alpha} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}$: l'intégrale est *convergente*.

Théorème 15 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$

3.2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$

Définition 7 :

Soit f continue sur $[a, +\infty[$, et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, pour tout réel x de $[a, +\infty[$.

- Si F admet une limite finie en $+\infty$, on dit que l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est convergente, et on note : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$
- Si F n'a pas de limite finie quand $x \to +\infty$, l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est divergente.

Exemple 5 : soit $f(x) = e^{-x}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est-elle convergente ?
$\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = 1$.
L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est *convergente* et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

Exemple 6 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est-elle convergente ?
$\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc cette intégrale est *divergente.*

Exemple 7 : Soit $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$, avec $\alpha \neq 1$. L'intégrale de f_α sur $[1, +\infty[$ est-elle convergente ?
$\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{\alpha - 1}$

- Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$

donc l'intégrale converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha - 1}$

- Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$, donc l'intégrale est divergente.

Théorème 16 : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$

Remarque 1 : Le résultat du théorème 16 est à rapprocher du théorème sur les *séries de Riemann :* la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$. Voir le paragraphe 7.

Remarque 2 : Dans les exemples précédents, on a pris des fonctions dont la limite en $+\infty$ est 0. Soit f une fonction telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, avec $\ell > 0$.
On a alors : $\forall\epsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R}/ \quad x > A \Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.
Prenons ϵ tel que $\ell - \epsilon > 0$, alors : $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \int_a^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt$
et si $x > A$, $\displaystyle\int_A^x f(t)dt > (x - A)(\ell - \epsilon)$, donc $\displaystyle\int_a^x f(t)dt > \int_a^A f(t)dt + (x - A)(\ell - \epsilon)$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x - A)(\ell - \epsilon) = +\infty$, l'intégrale diverge.
En utilisant la fonction opposée, on obtient le même résultat lorsque $\ell < 0$.

Théorème 17 : Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Attention ! la réciproque est fausse : par exemple l'intégrale de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$ est divergente, alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3.3 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $]-\infty, b]$

Définition 8 : Soit f continue sur $]-\infty, b]$, et $F(x) = \int_x^b f(t)dt$, pour tout réel x de $]-\infty, b]$.
• Si F admet une limite finie en $-\infty$, on dit que l'intégrale de f sur $]-\infty, b]$ est convergente, et on note : $\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt$
• Si F n'a pas de limite finie quand $x \to -\infty$, l'intégrale de f sur $]-\infty, b]$ est divergente.

Théorème 18 :
$\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$, et alors : $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$
$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$, et alors : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$

3.4 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$, sans prolongement par continuité

Définition 9 : Soit f une fonction continue sur $]a, b[$. L'intégrale de f sur $]a, b[$ est *convergente* si, et seulement si, pour un certain réel c de $]a, b[$ les intégrales de f sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$ sont toutes deux convergentes.
Dans ce cas : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.
Si au moins une de ces deux intégrales est divergente, l'intégrale de f sur $]a, b[$ est divergente.

Remarque 1 : cette définition s'étend aux intervalles du type $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$.
Remarque 2 : La convergence de l'intégrale et sa valeur ne dépendent pas du "point de coupure" c choisi, à cause de la relation de Chasles sur les intégrales. On choisira donc le réel c le plus simple possible.

Exemple 9 : Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction f est définie et continue sur $]-1, 1[$.
Pour étudier la convergence de l'intégrale de f sur $]-1, 1[$, on étudie séparément les convergences des intégrales de f sur $[0, 1[$ et sur $]-1, 0]$.
$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = [-\sqrt{1-t^2}]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2}$
Donc l'intégrale de f sur $[0, 1[$ est convergente et vaut 1.
$\int_x^0 f(t)dt = -1 + \sqrt{1-x^2}$ donc la deuxième intégrale converge et vaut -1.
Conclusion : l'intégrale de f sur $]-1, 1[$ est convergente et : $\int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt = -1 + 1 = 0$.

3.5 Etude de l'existence d'une intégrale

Soit à étudier l'existence de $\int_a^b f(t)dt$, avec $a < b$, bornes éventuellemnt infinies. Pour les intégrales généralisées, le problème de l'existence de l'intégrale se confond avec celui de sa convergence. On peut donc résumer comme suit :

- Si f est continue sur $[a, b]$, *pas de problème* (intégrale *définie.*)
- Si f admet un PPC sur$[a, b]$, *faux problème* (on se ramène à l'intégrale du PPC de f, qui est une intégrale définie.)
- Si f est continue sur $]a, b]$, sans PPC, *problème en* a. (On étudie l'intégrale $\int_x^b f(t)dt$ et sa limite quand x tend vers a.)
- Si f est continue sur $[a, b[$, *problème en* b.(On étudie l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ et sa limite quand x tend vers b.)

- Si f est continue sur $]a,b[$, sans PPC, *problème aux deux bornes.* (On “coupe” l'intervalle en un point c et on étudie séparément les convergences des deux intégrales.)

4 Propriétés des intégrales généralisées

4.1 Relation de Chasles

La relation de Chasles reste vraie pour les intégrales généralisées **convergentes**.

Exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2(t-1)}dt = \int_0^1 e^{-2(t-1)}dt + \int_1^{+\infty} e^{-2(t-1)}dt$

4.2 Linéarité

La linéarité reste valable pour les intégrales généralisées **convergentes**, en particulier la somme de deux intégrales convergentes sur un même intervalle est une intégrale convergente.

4.3 Positivité

La positivité de l'intégrale reste valable pour les intégrales généralisées **convergentes**, et en particulier, si f et g sont deux fonctions dont les intégrales sur $[a,+\infty[$ sont convergentes telles que : $\forall t \in [a,+\infty[\quad f(t) \leq g(t)$ alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

4.4 Intégration par parties

Attention ! L'intégration par parties n'est valable que pour les intégrales **définies**.

Pour calculer une intégrale du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$, par exemple, on peut calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ par une intégration par parties et *ensuite* calculer la limite de cette intégrale quand x tend vers $+\infty$.

4.5 Changement de variable

Le changement de variable reste valable pour calculer une intégrale généralisée convergente, à condition de remplacer éventuellement le “changement de bornes” par un calcul de limites.

Exemple : Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$, on prend $u=\sqrt{t}$, $du = \dfrac{1}{2u}dt$

Changement de bornes : si $t=0$, $u=0$, et si $t \to +\infty$, alors $u \to +\infty$

donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} 2ue^{-u}du$

4.6 Fonctions paires et impaires

Théorème 19 :

Soit f continue sur $]-a,a[$, où a est un réel strictement positif.

- **Si f est paire** :

Si l'intégrale de f sur $[0,a[$ est convergente, alors l'intégrale de f sur $]-a,a[$ est convergente, et :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$$

Sinon, l'intégrale est divergente.

- **Si f est impaire** :

Si l'intégrale de f sur $[0,a[$ est convergente, alors l'intégrale de f sur $]-a,a[$ est convergente, et :

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

Sinon, l'intégrale est divergente.

La démonstration se fait à l'aide d'un changement de variable (voir les intégrales définies).

5 Convergence des intégrales impropres de fonctions positives

On suppose dans ce paragraphe que f est une fonction positive et continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$.

Théorème 20 : Si f est croissante et majorée sur $[a, b[$ (resp. sur $[a, +\infty[$) alors f admet une limite finie en b.

(*Théorème admis*)

Théorème 21 : Si f est continue et positive sur $[a, b[$ (resp. sur $[a, +\infty[$) et s'il existe un réel M tel que
$\forall x \in [a, b[\qquad \displaystyle\int_a^x f(t)dt \leq M$
alors l'intégrale de f sur$[a, b[$ est convergente.

dém : Il suffit d'appliquer le théorème 20 à la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Théorème 22 : Soient f et g deux fonctions positives sur $[a, b[$ telles que :
$\forall t \in [a, b[\qquad f(t) \leq g(t)$. Alors :
• Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ est convergente,l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente.
• Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente,l'intégrale de g sur $[a, b[$ est divergente.

dém :Dans le premier cas, pour tout x de $[a, b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$
donc en appliquant le théorème 21, l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente.
Dans le deuxième cas, comme pour tout x de $[a, b[\qquad \displaystyle\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$,
si $\displaystyle\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to b} \int_a^x g(t)dt = +\infty$.

Exemple 1 : Soit $f(t) = e^{-t^2}$. L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est-elle convergente ?
$\forall t \in [1, +\infty[\qquad t^2 \geq t \qquad$, d'où : $\qquad e^{-t^2} \leq e^{-t}$
Or on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ l'est aussi d'après le théorème 22. D'autre part la fonction f est *continue* sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une intégrale *définie*. En utilisant la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

donc l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est *convergente*.

La dernière partie du raisonnement peut se généraliser :

Théorème 23 : Soit f continue sur $[a, b[$, et c un réel de $[a, b[$.
Si $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Théorème 24 : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$
• Si $f \underset{b}{=} \circ(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ aussi.
• Si $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, alors les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

dém :• Si $f \underset{b}{=} \circ(g)$, alors $\displaystyle\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$

donc : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists A \in [a, b[\quad / \quad A < t < b \Rightarrow 0 < \dfrac{f(t)}{g(t)} < \epsilon$

donc sur $[A, b[$, on a l'inégalité : $f(t) < \epsilon g(t)$
et d'après le théorème 22, si l'intégrale de g sur $[a, b[$ est convergente, celle de ϵg sur $[A, b[$ converge également, donc celle de f sur $[A, b[$ converge, et d'après le théorème 23, l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente.

• $f(t) \underset{b}{\sim} g(t) \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to b} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$

donc $\quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists A \in [a, b[\quad / \quad A < t < b \Rightarrow 1 - \epsilon < \dfrac{f(t)}{g(t)} < 1 + \epsilon$

donc sur l'intervalle $[A, b[$, on a : $(1-\epsilon)g(t) < f(t) < (1+\epsilon)g(t)$. Les théorèmes 22 et 23 permettent de conclure.

Exemple 2 : On veut étudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2} dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $\Delta < 0$) et donc en particulier sur $[0, +\infty[$.

On a : $\dfrac{1}{1+t+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente, il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2} dt$
puis, d'après le théorème 23, pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2} dt$.

Exemple 3 : On veut étudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$.

La fonction à intégrer est continue comme produit de fonctions continues sur $[0, +\infty[$.
On sait que, pour tout réel α, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$, c'est-à-dire : $e^{-t} \underset{+\infty}{=} \circ(\dfrac{1}{t^\alpha})$

en particulier pour $\alpha = 4$: $e^{-t} \underset{+\infty}{=} \circ(\dfrac{1}{t^4})$ d'où $t^2 e^{-t} \underset{+\infty}{=} \circ(\dfrac{1}{t^2})$ donc comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente, il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ puis pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$.

Généralisation :

Théorème 25 : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

dém : On sait que $e^{-t} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{t^{n+2}}\right)$, d'où $t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente, et comme $t \mapsto t^n e^{-t}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

Pour calculer cette intégrale, posons $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t} dt$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
Comme on a le produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left[-e^{-t} t^n\right]_0^x + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= -e^{-x} x^n + n I_{n-1}(x) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x) = I_n$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} I_{n-1}(x) = I_{n-1}$, et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$
donc on obtient : $\quad I_n = n I_{n-1}$, puis, par descente finie : $\quad I_n = n! I_0 = n!$

6 Intégrales impropres absolument convergentes

Définition 10 : Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est absolument convergente si, et seulement si, l'intégrale de $|f|$ sur $[a, b[$ est convergente.

Cette définition s'étend aux intégrales impropres de bornes infinies.

Théorème 26 : Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.

7 Comparaison des séries et des intégrales

Théorème 27 : Si f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$, alors la série de terme général $f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

dém : Soit un entier naturel N tel que $N \geq a$. Comme f est décroissante sur $[a,+\infty[$,

$$\forall k \geq N, \quad \forall t \in [k,k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

Donc d'après l'inégalité de la moyenne :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

et en additionnant membre à membre ces inégalités pour k de N à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=N+1}^{n} f(k) \leq \int_N^n f(t)dt \leq \sum_{k=N}^{n-1} f(k)$$

Notons S_n la somme partielle d'ordre n de la série $(f(n))$, on a alors :

$$\forall n \geq N, \quad S_n - S_N \leq \int_N^n f(t)dt \leq S_{n-1} - S_{N-1}$$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge,alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée et, d'après l'inégalité précédente, la suite (S_n) est aussi majorée, donc la série (à termes positifs) $(f(n))$ est convergente.
Si la série converge, alors la suite (S_n) est majorée : il existe un réel S tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n-1} \leq S$.
Or pour tout réel x il existe un entier n tel que $n \geq x$, et on a alors, puisque f est positive sur $[a,+\infty[$,

$$\int_N^x f(t)dt \leq \int_N^n f(t)dt \leq S$$

La fonction F est donc majorée par S, donc l'intégrale de f sur $[N,+\infty[$ est convergente, et comme f est continue sur $[a,N]$ l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est également convergente.
On a bien démontré que l'intégrale et la série sont de même nature.

D'après le théorème 16 et le théorème 27, on peut donc considérer comme démontré le théorème sur les séries de Riemann :

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.