Chapitre 6. Vecteurs aléatoires

Table des matières

1 Définition

Définition 1 : On appelle vecteur aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, où les X_i sont des variables aléatoires réelles.

Le cas que nous étudierons dans les paragraphes suivants est celui de $n = 2$, c'est-à-dire celui d'un ***couple*** *de variables aléatoires, que l'on note alors (X, Y).*

Définition 2 : Soit (X, Y) un couple de VAR définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
d'ensembles de valeurs respectifs $X(\Omega) = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{1 \leq j \leq p}$.
On appelle **loi conjointe** du couple (X, Y) l'application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ vers $[0, 1]$:
$(x_i, y_j) \longmapsto p_{ij} = P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$

On peut alors représenter la loi du couple (X, Y) dans un tableau à double entrée.

Exemple : On lance deux dés équilibrés. Soit X la somme des deux nombres obtenus, et Y la valeur absolue de leur différence. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$j \backslash i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P(Y = j)$
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{8}{36}$
3	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{4}{36}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
$P(X = i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Définition 3 : La loi de probabilité de la variable X et celle de Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y).

On obtient ces lois à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{j=1}^{p} p_{ij}$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

On note parfois : $p_{i\bullet} = P(X = x_i)$ et $p_{\bullet j} = P(Y = y_j)$.

On a alors : $p_{i\bullet} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} p_{ij}$, et : $p_{\bullet j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

On a aussi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{p} p_{\bullet j} = 1$.

Remarque : La donnée de la loi du couple entraîne celle des lois marginales. Par contre il ne suffit pas d'avoir les lois marginales pour connaître la loi conjointe des deux variables.
Les deux tableaux ci-dessous donnent deux couples de VAR ayant les mêmes lois marginales mais pas la même loi conjointe :

$j \backslash i$	1	2	3	$P(Y = j)$
1	0,1	0,2	0,2	0,5
2	0,1	0,3	0,1	0,5
$P(X = i)$	0,2	0,5	0,3	1

$j \backslash i$	1	2	3	$P(Y = j)$
1	0,1	0,25	0,15	0,5
2	0,1	0,25	0,15	0,5
$P(X = i)$	0,2	0,5	0,3	1

2 Lois conditionnelles, indépendance des variables aléatoires

Définition 4 : Soit X une VAR définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et A un événement de probabilité non nulle.
La loi conditionnelle de X par rapport à A est l'application :
$x_i \longmapsto P_A(X = x_i)$.

Notation : Loi de $X_{|A}$
Cas fréquent : La loi de X conditionnée par $(Y = y_j)$ est donnée par :
$P_{|Y=y_j}(X = x_i) = \dfrac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$
On définit de même la loi de Y conditionnée par un événement $(X = x_i)$.

Exemple classique : Soit X une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ, et Y une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, si X prend la valeur n non nulle, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres n et p. (Si $X = 0$, alors $Y = 0$.) Alors Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

dém : Soit k un entier naturel. En appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $(Y = k)$, avec le système complet d'événements $\{(X = n)/n \in \mathbb{N}\}$ on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(X=n)}(Y = k)P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} e^{q\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)}{k!} \end{aligned}$$

Définition 5 : Deux variables aléatoires X et Y à ensembles de valeurs finis ou dénombrables sont *indépendantes* si, et seulement si :
$\forall x_i \in X(\Omega), \quad \forall y_j \in Y(\Omega), \quad (X = x_i)$ et $(Y = y_i)$ sont des événements indépendants.

Dans ce cas : $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$, c'est-à-dire : $p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$

Propriété : Si X et Y sont des V.A.R. indépendantes, et f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles de valeurs de X et Y, alors les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont également indépendantes.

3 Somme de deux variables aléatoires

Définition 6 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X(\Omega) = \{x_i/1 \leq i \leq n\}$
$Y(\Omega) = \{y_j/1 \leq j \leq p\}$ et (p_{ij}) la loi conjointe du couple (X, Y).
Alors $X + Y$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi de probabilité est donnée par :
$P(X + Y = z) = \displaystyle\sum_{\{(i,j)/x_i+y_j=z\}} p_{ij}$

Exemple : Soit le couple(X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

j \ i	0	1	2	$P(Y = j)$
0	0,3	0,1	0,1	0,5
1	0,1	0,3	0,1	0,5
$P(X = i)$	0,4	0,4	0,2	1

Soit $Z = X + Y$. Alors $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et la loi de Z est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} P(Z=0) & = & P((X=0)\cap(Y=0)) = 0,3 \\ P(Z=1) & = & P((X=0)\cap(Y=1)) + P((X=1)\cap(Y=0)) = 0,1+0,1 = 0,2 \\ P(Z=2) & = & P((X=1)\cap(Y=1)) + P((X=2)\cap(Y=0)) = 0,4 \\ P(Z=3) & = & P((X=2)\cap(Y=1)) = 0,1 \end{array}$$

Remarque : En calculant l'espérance de Z à l'aide de sa loi de probabilité, on constate l'égalité : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Théorème 1 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à ensembles de valeurs finis ou dénombrables, alors
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Cas fréquent : Dans le cas où X et Y sont deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, on calcule la loi de probabilité de $X+Y$ en appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $(X+Y=k)$ avec le système complet d'événements $\{(X=i)/i \in X(\Omega)\}$:

$$P(X+Y=k) = \sum_{i\in X(\Omega)} P((X+Y=k)\cap(X=i)) = \sum_{i\in X(\Omega)} P((X=i)\cap(Y=k-i))$$

Il suffit alors de connaître la loi conjointe du couple (X, Y).
Le cas le plus simple est celui de deux variables aléatoires *indépendantes*. On a alors :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i\in X(\Omega)} P(X=i)P(Y=k-i)$$

certains termes de cette somme pouvant être nuls.

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires *indépendantes* suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

dém : En utilisant la formule des probabilités totales et l'indépendance des deux variables on obtient :

$$\begin{array}{rcl} P(X+Y=k) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i)P(Y=k-i) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \\ & = & \displaystyle\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \\ & = & \displaystyle e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} \end{array}$$

(en utilisant la formule du binôme de Newton.)

On démontre de même le résultat suivant :
La somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ suit une loi binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$.

4 Produit de deux variables aléatoires

Définition 7 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X(\Omega) = \{x_i/1 \leq i \leq n\}$
$Y(\Omega) = \{y_j/1 \leq j \leq p\}$ et (p_{ij}) la loi conjointe du couple (X, Y).
Alors XY est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi de probabilité est donnée par :
$P(XY=t) = \displaystyle\sum_{\{(i,j)/x_iy_j=t\}} p_{ij}$

Reprenons l'exemple précédent : Si $T = XY$, alors $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et la loi de T est donnée par :

$$\begin{aligned}
P(T=0) &= P((X=0)\cap(Y=0)) + P((X=0)\cap(Y=1)) + P((X=1)\cap(Y=0)) + P((X=2)\cap(Y=0)) = 0,6 \\
P(T=1) &= P((X=1)\cap(Y=1)) = 0,3 \\
P(T=2) &= P((X=2)\cap(Y=1)) = 0,1
\end{aligned}$$

Théorème 2

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,
tels que $X(\Omega) = \{x_i/1 \leq i \leq n\}$, $Y(\Omega) = \{y_j/1 \leq j \leq p\}$ et (p_{ij}) la loi conjointe du couple (X, Y)
alors $E(XY) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i y_j p_{ij}$
et si X et Y sont *indépendantes*, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Remarque : La relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ n'entraîne pas forcément l'indépendance
des deux variables X et Y.

5 Sup et Inf de deux variables aléatoires indépendantes

Définition 8 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note $Z = Sup(X, Y)$ ou $Max(X, Y)$ le plus grand des deux nombres X et Y,
à l'issue d'une expérience aléatoire donnée,
et $T = Inf(X, Y)$ ou $Min(X, Y)$ le plus petit de ces deux nombres.

Pour déterminer la loi de probabilité de Z on utilise la fonction de répartition :
Pour tout entier k, $P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$
(par indépendance des variables X et Y.)
On a alors, pour tout k de $Z(\Omega)$, $P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1)$.
De même, $P(T \geq k) = P((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = P(X \geq k)P(Y \geq k)$, puis
pour tout k de $T(\Omega)$, $P(T = k) = P(T \geq k) - P(T \geq k+1)$.

Exemple : Soient $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ deux variables indépendantes.
Cherchons la loi de probabilité du plus petit des deux nombres X et Y, noté T.
On a : $P(X \geq k) = (1-p_1)^{k-1} = q_1^{k-1}$: en effet si le rang du premier succès est au moins égal à k, c'est que les $k-1$ premiers essais sont des échecs. On peut aussi calculer cette probabilité à partir de la définition de la fonction de répartition :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_1 (q_1)^{i-1} = 1 - p_1 \sum_{j=0}^{k-2} (q_1)^j = 1 - p_1 \frac{1 - (q_1)^{k-1}}{1 - q_1}$$

On obtient, d'après les calculs précédents : pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$
$P(T = k) = (q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k = (1 - q_1 q_2)(q_1 q_2)^{k-1}$
T suit donc une loi géométrique de paramètre $1 - q_1 q_2$

6 Covariance, corrélation

Définition 9 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La *covariance* de X et Y est le nombre : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

L'espérance du produit se calcule à partir de la loi conjointe du couple (X, Y) : formule du théorème 2.
Propriétés :

1. Si X et Y sont indépendantes, $Cov(X, Y) = 0$.
2. Si Y est une variable certaine, c'est-à-dire une variable à une seule valeur C, telle que $P(Y = C) = 1$, alors $Cov(X, Y) = E(CX) - CE(X) = 0$
3. $Cov(X, X) = V(X)$
4. $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$ (On retrouve ainsi $V(aX + b) = a^2 V(X)$.)
5. $Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$ et $Cov(X, Y+Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$ (bilinéarité)

6. $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$ et $V(X-Y) = V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y)$ (analogie avec les identités remarquables)

Définition 10 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Le *coefficient de corrélation* de X et Y est le nombre : $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Propriétés :

1. $\rho(aX+b, cY+d) = \epsilon\rho(X,Y)$, où ϵ est le signe du produit ac.
2. Pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires, $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$, et $|\rho(X,Y)| = 1$ dans le cas où $Y = aX+b$.

dém : $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad V(\lambda X+Y) \geq 0$, c'est-à-dire
$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad V(X)\lambda^2 + 2Cov(X,Y)\lambda + V(Y) \geq 0$
Le discriminant de ce trinôme du second degré en λ est donc négatif ou nul :
$4[Cov(X,Y)]^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0$, d'où : $[Cov(X,Y)]^2 \leq V(X)V(Y)$, soit : $|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.
Et si l'égalité est réalisée c'est que le discriminant est nul : il existe alors un réel λ tel que $V(\lambda X+Y) = 0$, c'est-à-dire :
Il existe une constante C telle que $P(\lambda X+Y = C) = 1$, ou encore telle que : $P(Y = -\lambda X + C) = 1$. Il y a donc bien une relation affine entre X et Y.

7 Généralisation aux vecteurs aléatoires sur $\mathbb{R}^n$

On retiendra les énoncés suivants :

Définition 11 : n variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont dites indépendantes
dans leur ensemble (ou : globalement indépendantes)
si $\forall(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$,
les événements $(X_1 = i_1), (X_2 = i_2), \ldots, (X_n = i_n)$ sont globalement indépendants.
Elles sont indépendantes 2 à 2 si
$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j, \quad (X_i = x)$ et $(X_j = y)$ sont indépendants,
pour toutes les valeurs possibles de ces deux variables.

Théorème 3 :

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$$

Cas particulier : si les n variables sont indépendantes 2 à 2, $V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

Exemple important : Soit X une variable de Bernoulli, caractéristique d'un événement A de probabilité p non nulle, appelé *succès* : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
On répète n fois cette expérience aléatoire, et on note X_i la variable indicatrice du succès à la i^{eme} tentative.
Les variables X_i ont toutes la même loi que X.
Soit Y le nombre de succès en n tentatives, alors : $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
En effet, il suffit de compter parmi les X_i celles qui valent 1.
Si on suppose de plus que les variables X_i sont indépendantes,on obtient :
$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

Théorème 4 La somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit une loi binômiale de paramètres n et p.

On retrouve alors l'expression de l'espérance et de la variance d'une variable binomiale, en appliquant les formules du théorème 3.