Chapitre 5. Réductions des endomorphismes

Table des matières

1 Rappels techniques

1.1 Matrices diagonales

Définition 1 : Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *diagonale* si tous ses coefficients *non diagonaux* sont nuls.

Notation : $diag(1,0,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Puissances successives d'une matrice diagonale : Si $D = diag(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, $\quad D^p = diag({\alpha_1}^p, {\alpha_2}^p, \dots {\alpha_n}^p)$.

1.2 Matrices semblables

Définition 2 : Deux matrices A et B sont dites *semblables* si il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque : La matrice identité I_n n'est semblable qu'à elle-même.

1.3 Matrice diagonalisable

Définition 3 : Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *diagonalisable* si A est semblable à une matrice diagonale. ***Exemple :*** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Le calcul donne : $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ puis : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Intérêt : Diagonaliser une matrice est utile, par exemple, pour calculer les puissances successives de cette matrice. En effet, s'il existe deux matrices P et D, avec P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$, alors pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

(à démontrer par récurrence). Or D^n est facile à calculer.

Le problème est donc : comment trouver une matrice P et une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$? Et tout d'abord, une matrice A étant donnée, existe-t-il toujours des matrices P et D répondant à la question ?

2 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

Définition 4 : Une *valeur propre* de f est un réel λ tel qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que : $f(u) = \lambda u$. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le *spectre* de f.

Remarque : λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow Ker(f - \lambda id) \neq \{\vec{0}\}$

Conséquence : Si l'espace vectoriel E est de dimension finie, et que A est la matrice de f par rapport à une base B, une valeur propre λ de f est un réel tel que **la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible**, c'est-à-dire tel que le système $(A - \lambda I)X = 0$ n'est pas un système de Cramer. Pour trouver les valeurs propres de f il suffit donc de mettre ce système sous forme triangulaire et de déterminer alors les valeurs de λ pour lesquelles l'un des pivots est nul.

Exemple 1 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En écrivant le système $(A - \lambda I)X = 0$ sous forme de matrice complète :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 0 & -1+\lambda & -3+4\lambda-\lambda^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+5\lambda-4 & 0 \end{array}\right)$$

Le système n'est pas de Cramer si, et seulement si, $1-\lambda=0$ ou $-\lambda^2+5\lambda-4=0$. Les solutions de cette équation sont 1 et 4, donc les valeurs propres de f sont 1 et 4.

Définition 5 : u est *vecteur propre* de f si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $f(u)=\lambda u$ et $u\neq\{\vec{0}\}$. On dit que u est vecteur propre *associé* à la valeur propre λ.

Définition 6 : Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est l'ensemble des vecteurs u de E tel que $f(u)=\lambda u$. C'est donc l'ensemble des vecteurs propres de f associés à λ, plus le vecteur nul.
Notation : $E_\lambda=\{u\in E/f(u)=\lambda u\}$

Remarque 1 : $E_0=Ker(f)$

Remarque 2 : E_λ est l'ensemble solution du système $(A-\lambda I)X=0$, si E est de dimension finie et A est la matrice de f par rapport à une certaine base de E.

Exemple 1 (suite) : Cherchons les sous-espaces propres respectivement associés à 1 et 4.

$$\boxed{E_1} : f(u)=u \quad\Leftrightarrow\quad (A-I)X=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad\Leftrightarrow\quad z=-x-y$$
d'où : $E_1=\{(x,y,-x-y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=Vect((1,0,-1),(0,1,-1))$

$$\boxed{E_4} : f(u)=4u \quad\Leftrightarrow\quad (A-4I)X=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y=z\\ x=-y+2z\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} y=z\\ x=z\end{cases}$$
d'où : $E_4=\{(z,z,z)/z\in\mathbb{R}\}=Vect((1,1,1))$

Théorème 1 : E_λ est un sous-espace vectoriel de E

dém : En effet, $E_\lambda=Ker(f-\lambda id)$.

3 Propriétés des éléments propres

3.1 Valeur propre nulle

Théorème 2 : f a pour valeur propre 0 $\Leftrightarrow$ A n'est pas inversible $\Leftrightarrow$ f n'est pas bijectif.

Ce théorème s'utilise aussi bien en prenant le contraire de chaque affirmation.

3.2 Intersection de deux SEP

Théorème 3 : Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres de f, $E_{\lambda_1}\cap E_{\lambda_2}=\{\vec{0}\}$

dém : Soit $u\in E_{\lambda_1}\cap E_{\lambda_2}$: alors $f(u)=\lambda_1 u$ et $f(u)=\lambda_2 u$ d'où $\lambda_1 u=\lambda_2 u$ et donc, comme $\lambda_1\neq\lambda_2$, $u=\vec{0}$.

Dans les théorèmes suivant on appelle n la dimension de E.

3.3 Réunion de bases de SEP

Théorème 4 : Soit $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ les différentes valeurs propres de f,
et $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_p$ des bases respectives des SEP $E_{\lambda_1},E_{\lambda_2},\ldots E_{\lambda_p}$. Alors :
$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\ldots\cup\mathcal{B}_p$ est une famille libre de vecteurs de E

Exemple 1 (suite) : Comme $E_1 = Vect((1,0,-1),(0,1,-1))$ et $E_4 = Vect((1,1,1))$, les trois vecteurs $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$, $(1,1,1)$ constituent une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et, par un argument de dimension, une *base* de $\mathbb{R}^3$.

Conséquence :
Si E est de dimension finie, le nombre de valeurs propres de f est *au maximum* égal à la dimension de E. En effet le nombre de vecteurs d'une famille libre de E est toujours inférieur ou égal à la dimension de E.

4 Diagonalisation d'un endomorphisme

Définition 7 : Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit *diagonalisable* si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est *diagonale*.

Exemple 1 (suite) : Soit $u_1 = (1,0,-1), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (1,1,1)$. On a vu que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On sait aussi que : $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$, $f(u_3) = 4u_3$. Donc la matrice de f par rapport à la base (u_1,u_2,u_3) est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

f est donc diagonalisable. D'autre part la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1,u_2,u_3) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pourrait vérifier que : $D = P^{-1}AP$.
Remarque : Soit $\mathcal{B}'' = (u_3,u_1,u_2)$, alors la matrice de f dans cette autre base sera :

$$D' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une base dans laquelle f se "diagonalise" n'est donc pas définie de façon unique.

Théorème 5 : $\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe une base de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } f.}$

dém :

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe une base de vecteurs propres de f, $u_1,u_2,\ldots,u_n$, respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Alors la matrice de f dans cette base est $diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe une base $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ dans laquelle la matrice de f est diagonale : $diag(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Alors c'est que : $f(v_1) = \alpha_1 v_1$, $f(v_2) = \alpha_2 v_2$, ..., $f(v_n) = \alpha_n v_n$. La base $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ est bien constituée de vecteurs propres.

Théorème 6 : $\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{la somme des dimensions des SEP est égale à } n.}$

dém : Avec les notations précédentes, supposons que chaque SEP E_{λ_k} ait une base $\mathcal{B}_k$, pour k de 1 à p. On sait que la réunion $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \mathcal{B}_p$ est une famille libre, qui comporte n vecteurs. Donc c'est une base de E constituée de vecteurs propres.

Théorème 7 : $\boxed{\text{Si } f \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes, } f \text{ est diagonalisable}}$

dém : Si f a n valeurs propres distinctes, il y a n SEP distincts, chacun a une base $\mathcal{B}_k$, et $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \mathcal{B}_p$ est une famille libre. Or une famille libre de E a au maximum n vecteurs : c'est donc qu'il y a un seul vecteur par base (chaque SEP est de dimension 1) et ces n vecteurs constituent une base de vecteurs propres.

Exemple 2 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique, avec $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -14 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
On obtient : $Spec(f) = \{0,-1,2\}$. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que f a 3 valeurs propres distinctes, f est diagonalisable.

5 Diagonalisation d'une matrice

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 8 : A est diagonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

dém : Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de vecteurs propres, donc il existe des réels λ_i, pour i de 1 à n, tel que : $f(u_i) = \lambda_i u_i$; dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de f est $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, et si P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, on a bien : $D = P^{-1}AP$.
Réciproquement, si la relation $D = P^{-1}AP$ est vérifiée pour une certaine matrice P, on en déduit la base de vecteurs propres de f, ce qui prouve que f est diagonalisable.
Dans la pratique la question est souvent posée sous la forme : la matrice A est-elle diagonalisable ? On peut de fait se passer de l'étape "endomorphisme de $\mathbb{R}^n$", si on utilise les notions de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice.

Définition 8 :

- Les valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
- Un vecteur propre de A est un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.
- Le sous-espace propre de A associé à λ est l'ensemble des éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$.

Remarque : Quand on cherche un SEP d'une matrice, on résout un système linéaire $AX = \lambda X$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'on écrit les solutions de ce système sous forme de ***matrices colonnes***.

Exemple 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Chercher les valeurs propres et les sous-espaces propres de A, et en déduire deux matrices A' et P telles que $A' = P^{-1}AP$.

On étudie le système linéaire $(A - \lambda I)X = 0$, sous forme de matrice complète :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ & 7-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7-\lambda & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7-\lambda & 0 \\ 7-\lambda & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & -40+14\lambda-\lambda^2 & -4(7-\lambda) & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (7-\lambda)(\lambda^2-14\lambda+24) & 0 \end{array}\right)$$

Le système n'est pas de Cramer si, et seulement si, $\lambda = 7$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = 12$: ces trois nombres sont les valeurs propres de A.

- Si $\lambda = 2$ le système s'écrit :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{4}z \\ 3x = -5y - 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{4}z \\ x = \frac{3}{4}z \end{cases} \text{ d'où } E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$
- Si $\lambda = 7$ le système s'écrit :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{4}{3}z \end{cases} \text{ d'où } E_7 = Vect\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$
- Si $\lambda = 12$ le système s'écrit :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4}z \\ 3x = 5y - 4z = \frac{9}{4}z \end{cases} \text{ d'où } E_{12} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

Posons : $P = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que : $A' = P^{-1}AP$.

En résumé :

Théorème 9 :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ayant p valeurs propres.
• $p \leq n$
• La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.
• A est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des SEP est égale à n.
Soit alors la matrice P dont les colonnes sont des vecteurs propres formant une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $A' = P^{-1}AP$ est alors diagonale et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.
• Si A admet n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable,
et tous ses SEP sont de dimension 1.

6 Propriétés des valeurs propres d'une matrice

6.1 Matrice triangulaire

Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 19 \end{pmatrix}$ alors $Spec(A) = \{-3, 1, 19\}$, et comme les 3 valeurs propres sont distinctes, on peut dire que A est diagonalisable.

6.2 Matrice inversible

En transposant le théorème 2 aux valeurs propres de matrices, on obtient :
A inversible $\Leftrightarrow$ 0 n'est pas valeur propre de A
A non inversible $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre de A

6.3 Matrices symétriques

Théorème 10 : Si A est *symétrique*, alors A est diagonalisable. *(Théorème admis)*

6.4 Matrices à une seule valeur propre

Supposons que A ait une seule valeur propre, notée α.
Alors, si A est diagonalisable, A est semblable à $diag(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) = \alpha I_n$, c'est-à-dire : il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \alpha I_n$, soit : $A = P(\alpha I_n)P^{-1} = \alpha P I_n P^{-1} = \alpha I_n$, d'où le résultat :

Théorème 11 :

Si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une seule valeur propre
• Soit A est une matrice *scalaire*
• Soit A n'est pas diagonalisable.

6.5 Combinaison linéaire de matrices

6.5.1 1^{er} cas : Combinaison linéaire de A et de I_n

Théorème 12 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Spec(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$, et $M = xA + yI_n$.
Alors $Spec(M) = \{x\lambda_i + y / 1 \leq i \leq p\}$, et M a les mêmes sous-espaces propres que A.
En particulier, si A est diagonalisable, M est aussi diagonalisable.

dém : Soit λ_i une valeur propre de A, et X_i un vecteur propre associé à λ_i.
Alors $MX_i = (xA + yI_n)X_i = xAX_i + yX_i = x\lambda_i X_i + yX_i = (x\lambda_i + y)X_i$
donc X_i est vecteur propre de la matrice M, associé à la valeur propre $x\lambda_i + y$.
De plus si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = A'$, alors

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P^{-1}(xA)P + P^{-1}(yI_n)P \\ &= xP^{-1}AP + yP^{-1}P \\ &= xA' + yI_n \\ &= diag(x\lambda_1 + y, x\lambda_2 + y, \ldots, x\lambda_n + y) \end{aligned}$$

6.5.2 2^{eme} cas : Combinaison linéaire de matrices ayant les mêmes vecteurs propres

Théorème 13 : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe une base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ où chaque vecteur U_i est vecteur propre de A associé à λ_i, et vecteur propre de B associé à μ_i, et $M = xA + yB$.
Alors la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est aussi une base de vecteurs propres de M, et les valeurs propres correspondantes sont $x\lambda_i + y\mu_i$.

dém : $MU_i = (xA + yB)U_i = x\lambda_i U_i + y\mu_i U_i = (x\lambda_i + y\mu_i)U_i$

7 Polynôme annulateur

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $A^2 - 2A - 3I_n$ et en déduire les valeurs propres de A.

Théorème 14 : Si X est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors :
$$A^n X = \lambda^n X$$

dém :
- L'égalité est contenue dans l'hypothèse pour $n = 1$.
- Si elle est vraie au rang n,
$$A^{n+1}X = A(A^n X) = A(\lambda^n X) = \lambda^n AX = \lambda^n \lambda X = \lambda^{n+1} X$$
L'égalité au rang n implique l'égalité au rang $n + 1$.
- Donc par récurrence, cette égalité est vraie pour tout entier naturel n.

Suite de l'exemple : On constate que $A^2 - 2A - 3I_n = 0$. Soit à présent une valeur propre λ de A et X un vecteur propre associé. Alors :
$$(A^2 - 2A - 3I_n)X = 0$$
D'autre part :
$$(A^2 - 2A - 3I_n)X = \lambda^2 X - 2\lambda X - 3X = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)X$$
Comme $X \neq 0$, $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -1$ ou $\lambda = 3$.
Donc *si λ est valeur propre de A*, $\lambda \in \{-1, 3\}$. Ces deux nombres sont les seuls réels qui peuvent être des valeurs propres de A.
Le sont-ils réellement ? Pour le savoir, il suffit de calculer les SEP correspondants : si $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$, alors λ est valeur propre de A.

Théorème 15 : Soit P un polynôme tel que $P(A)$ est la matrice nulle. Alors, si λ est valeur propre de A, $P(\lambda) = 0$.

Méthode : Si on connait un polynôme annulateur P de la matrice A, on résout l'équation $P(\lambda) = 0$, et on calcule les SEP associés aux valeurs trouvées.

8 Matrices CL

Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{pmatrix}$, et $A = CL = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & c_1 l_2 & \cdots & c_1 l_n \\ c_2 l_1 & c_2 l_2 & \cdots & c_2 l_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n l_1 & c_n l_2 & \cdots & c_n l_n \end{pmatrix}$

Cherchons les valeurs propres possibles de A par la méthode du polynôme annulateur.
$$A^2 = CLCL = C(LC)L$$
Posons $\alpha = LC = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \ldots + c_n l_n$, alors $A^2 = \alpha CL = \alpha A$
Si $P(x) = x^2 - \alpha x$, P est un polynôme annulateur de A. Ses valeurs propres sont donc solutions de l'équation :

$\lambda^2 - \alpha\lambda = 0$, soit : $\lambda = 0$ ou $\lambda = \alpha$.
$\boxed{E_0}$: Le sous-espace propre associé à 0 est l'ensemble des matrices colonnes X vérifiant $AX = 0$.

$$CLX = 0 \Leftrightarrow C(LX) = 0 \Leftrightarrow LX = 0 \Leftrightarrow l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n = 0$$

E_0 est l'ensemble solution d'un système d'une équation à n inconnues, donc c'est un SEV de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$. (On prend $n-1$ inconnues auxiliaires.)
$\boxed{E_\alpha}$: On a deux cas.

- Si $\alpha = 0$, le calcul est déjà fait : on a alors un seul SEP pour A, de dimension $n-1$, et par conséquent A n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha \neq 0$: comme $\dim(E_0) = n-1$, $\dim(E_\alpha) \leq 1$.
  Or, $AC = CLC = C(LC) = \alpha C$, donc C est vecteur propre de A associé à α. Comme $C \neq 0$, $\dim(E_\alpha) = 1$, et finalement $E_\alpha = Vect(C)$.
  Dans ce cas la matrice A est diagonalisable. Elle est semblable par exemple à :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$
On constate que les trois lignes de cette matrice sont proportionnelles entre elles, donc :

$$A = CL = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On a : $\alpha = LC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -8$ et $Spec(A) = \{0, -8\}$

$E\_8 = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et $E_0 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On peut prendre : $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Retour sur l'exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = I + J$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

or $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = CL$, avec : $LC = 3$ donc J a pour valeur propres 0 et 3, donc d'après le théorème 12 la matrice A a pour valeurs propres 1 et 4.

9 Commutant d'une matrice, d'un endomorphisme

Rappel : Le commutant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est : $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / MA = AM\}$
On a vu que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

Soit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A.
- Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base (U_1, U_2, U_3), et $A' = P^{-1}AP$.
  Montrer que : $MA = AM \Leftrightarrow M'A' = A'M'$, où $M' = P^{-1}MP$.

- Calculer toutes les matrices M' qui commutent avec A'.
- En déduire que $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel de dimension 3, dont on précisera une base.

Réponse :

- On trouve $AU_1 = 0$, $AU_2 = U_2$, $AU_3 = 4U_3$
-
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$MA = AM \Leftrightarrow PM'P^{-1}PA'P^{-1} = PA'P^{-1}PM'P^{-1} \Leftrightarrow PM'A'P^{-1} = PA'M'P^{-1} \Leftrightarrow M'A' = A'M'$
-
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow b = c = d = g = 0, \quad h = 4h, \quad f = 4f \quad \Leftrightarrow \quad b = c = d = g = h = f = 0$$
Donc $M'A' = A'M'$ si, et seulement si, M' est *diagonale*.
- On pose alors $M' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, et on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc :
$$M = PM'P^{-1} = \begin{pmatrix} -3x + 4z & -x + z & x - z \\ 6x - 2y - 4z & 2x - z & -2x + y + z \\ -6x - 2y + 8z & -2x - 2z & 2x + y - 2z \end{pmatrix}$$
ou : $M' = xJ_1 + yJ_2 + zJ_3$, ce qui donne : $M = xPJ_1P^{-1} + yPJ_2P^{-1} + zPJ_3P^{-1}$
donc $\mathcal{C}(A) = Vect(M_1, M_2, M_3)$, avec $M_i = PJ_iP^{-1}$.

Dans certains problèmes l'accent est mis sur la recherche de commutant d'un *endomorphisme*. Il faut savoir démontrer le résultat suivant, dans chaque cas particulier :

Théorème 16 : Soit u un vecteur propre de f, associé à une valeur propre λ tel que $dim(E_\lambda) = 1$. Alors si $g \circ f = f \circ g$, u est vecteur propre de g.

dém :

$$\begin{aligned} & g \circ f(u) = f \circ g(u) \\ \Leftrightarrow \quad & g(f(u)) = f(g(u)) \\ \Leftrightarrow \quad & g(\lambda u) = f(g(u)) \\ \Leftrightarrow \quad & f(g(u)) = \lambda g(u) \end{aligned}$$

donc $g(u) \in E_\lambda$, et comme E_λ est une droite vectorielle, il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$, donc u est un vecteur propre de g.
Conséquence : Si un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n a n valeurs propres distinctes, les endomorphismes g qui commutent avec f sont diagonalisables *dans la même base que* f. On utilise donc pour la diagonalisation la même matrice de passage.

10 Trace d'une matrice

Définition 9 : La trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.
Propriétés :

- $A \longmapsto Tr(A)$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.
- $Tr(AB) = Tr(BA)$
- Si A et A' sont semblables, $Tr(A) = Tr(A')$.
En effet, si $A' = P^{-1}AP$, $Tr(A') = Tr(PP^{-1}A) = Tr(A)$.
Conséquence : Si A admet n valeurs propres distinctes,
$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$