Chapitre 4. Suites et séries réelles

Table des matières

1 Rappels sur les fonctions

1.1 Fonctions usuelles

1.1.1 Logarithme népérien

Définition 1 : La fonction ln est la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse, qui s'annule en 1.

Propriétés : $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$ $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$

Limites : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

La courbe de la fonction ln admet une **branche parabolique** de direction Ox.
Tangente au point (1,0) : $y = x - 1$
Convexité : $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc la fonction ln est concave sur son ensemble de définition. Par conséquent la courbe est en dessous de ses tangentes, et en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln x \leq x - 1$$

1.1.2 Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$

Définition 2 : f est la fonction réciproque de la fonction ln : $y = e^x \Leftrightarrow x = ln(y)$
Propriétes :
- f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $\boxed{e^{a+b} = e^a e^b}$ $\boxed{(e^x)^a = e^{ax}}$ et en particulier : $\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$

Limites : $\boxed{\lim_{x\to -\infty} e^x = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to -\infty} xe^x = 0}$

La courbe de la fonction exponentielle admet une **branche parabolique** de direction Oy.
Tangente au point (0,1) : $y = x + 1$
Convexité : $f''(x) = e^x$, donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent la courbe est au dessus de ses tangentes, et en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x \geq x + 1$$

1.1.3 Exponentielle de base a

Définition 3 : Soit a un réel strictement positif. L'exponentielle de base a est la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = a^x = e^{xln(a)}$$

.
Propriétés :
- Si $a > 1$ alors f_a est croissante sur $\mathbb{R}$ et les limites sont les mêmes que pour la fonction exponentielle (de base e).
- Si $a < 1$ alors f_a est décroissante sur $\mathbb{R}$ et les limites en plus et moins l'infini sont interverties.

1.1.4 Fonctions puissances

Définition 4 : Soit α un réel quelconque. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f_α par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha ln(x)}$$

Dérivée : $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

- Si $\alpha < 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = +\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0$: les deux axes sont asymptotes à la courbe.
- Si $\alpha = 0$ $\quad f_\alpha$ est la fonction constante de valeur 1.
- Si $0 < \alpha < 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$: La fonction admet un prolongement par continuité en 0.
  $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_\alpha(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha-1} = +\infty \quad$ donc la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_\alpha(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = 0 \quad$ donc la courbe admet une branche parabolique de direction Ox.
- Si $\alpha = 1$ $\quad f_\alpha(x) = x$: la courbe représentative de f_α est la première bissectrice.
- Si $\alpha > 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$: La fonction admet un prolongement par continuité en 0.
  $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_\alpha(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha-1} = 0 \quad$ donc la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_\alpha(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = +\infty \quad$ donc la courbe admet une branche parabolique de direction Oy.

Exercice : Représenter graphiquement les fonctions f_α correspondant aux différents cas.

1.2 Limites usuelles

1.2.1 Polynômes et fonctions rationnelles

- La limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) d'une fonction polynôme est égale à celle de son terme de plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) d'une fonction rationnelle (c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynômes) est égale à celle du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 4x + 2}{x^2 - 1}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Remarque : $f(x) \sim x$ quand x tend vers $+\infty$.

On a aussi : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^2 + 5x + 2}{x^2 - 1} = -6$

La courbe de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation : $y = x - 6$

1.2.2 Croissances comparées des fonctions usuelles

Soit α un réel strictement positif.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^\alpha} = 0} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty} \quad \boxed{\lim_{x \to 0} x^\alpha ln(x) = 0} \quad \boxed{\lim_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0}$$

1.2.3 Limites usuelles issues du calcul des dérivées

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x - 1} = 1} \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} = 1}$$

1.2.4 Opérations sur les limites

On complètera les tableaux suivants :

g \ f	a	$+\infty$	$-\infty$
b	$a+b$	$+\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$			

Somme de f et g

g \ f	0^+	a	$+\infty$
0^+			
b			
$+\infty$			

Produit de f et g, $a > 0$, $b > 0$

g \ f	0^+	a	$+\infty$
0^+			
b			
$+\infty$			

Quotient de f et g, $a > 0$, $b > 0$

1.3 Bijections

Théorème 1 : Théorème fondamental de l'analyse

• Si une fonction f est *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle I, elle définit une bijection de I vers l'intervalle image de I par f, noté J.
• La restriction de f à l'intervalle I admet donc une application réciproque qui est une bijection de J vers I, et f^{-1} a même sens de variation sur J que f sur I.
• Si un réel α appartient à J, l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution dans l'intervalle I.

En pratique : Après une étude des variations de f, en général à l'aide de sa dérivée, on détermine un intervalle I sur lequel f est strictement monotone. De plus si f est dérivable sur I, elle est continue sur I. Si cet intervalle est fermé, du type $I = [a, b]$, alors J est fermé et ses bornes sont $f(a)$ et $f(b)$. S'il est ouvert, $I =]a, b[$, J est également ouvert et ses bornes sont $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

Si on étudie l'équation $f(x) = \alpha$, il reste alors à déterminer si α appartient à J.

Théorème 2 : Soit f une bijection de I vers J, dérivable sur I, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en tout point y de J tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$,
et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y)} = \dfrac{1}{f'(x)}$ (On note $y = f(x)$)

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, donc f est strictement croissante (et continue car dérivable) sur $\mathbb{R}$.
D'après un facile calcul de limites, f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On remarque que $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$, d'où $f'(x) = \sqrt{1 + (f(x))^2}$, c'est-à-dire : $f'(f^{-1}(y)) = \sqrt{1 + y^2}$. On a donc :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

1.4 Rappels sur les dérivées

1.4.1 Définitions

Définition 5 :

- Soit une fonction f définie sur un intervalle *ouvert* I et x_0 un élément de I. La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est le nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$.
- Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I. La fonction f' qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est la *dérivée* de f sur I.
- Si le taux d'accroissement admet une limite finie quand x tend vers x_0 par valeurs *supérieures* (resp. *inférieures*) la fonction est *dérivable à droite en* x_0 (resp. *dérivable à gauche en* x_0) et on note :
  $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- *Attention* : Si f est dérivable à droite et dérivable à gauche, et si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors f n'est pas dérivable en x_0.

1.4.2 Equation de la tangente à la courbe de f en un point

Si une fonction f est dérivable au point a, la courbe de f admet au point $(a, f(a))$ la droite d'équation :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

1.4.3 Dérivées et opérations

Théorème 3 : Soient deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I. Leur somme et leur produit sont dérivables sur I, et si v ne s'annule pas sur I, leur quotient est dérivable sur I, et on a :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'} \qquad \boxed{(uv)' = u'v + v'u} \qquad \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$$

Théorème 4 : Soit f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g' \circ f(x)}$

Exemples : $[f(ax+b)]' = af'(ax+b)$ et $[f(\ln x)]' = \dfrac{1}{x} f'(\ln x)$

1.4.4 Dérivées d'ordre n

Définition 6 :

- Soit f une fonction dérivable sur I. Si sa dérivée f' est dérivable sur I, on dit que f est dérivable deux fois, et $f'' = (f')'$ est la dérivée seconde de f.
- Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et f une fonction dérivable $n-1$ fois sur I. Alors f est dérivable n fois si sa dérivée d'ordre $n-1$ est dérivable, et on note :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Exemple : Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

1.4.5 Convexité

Définition 7 : Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable deux fois.

- Si $\forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$, f est *convexe* sur I.
- Si $\forall x \in I$ $f''(x) \leq 0$, f est *concave* sur I.
- Si f'' s'annule et change de signe en un point x_0, la courbe de f admet un *point d'inflexion* en $(x_0, f(x_0))$, c'est-à-dire que la courbe **traverse la tangente** en ce point.

Propriété : Sur un intervalle où la fonction est convexe (resp. concave), la courbe est **au-dessus** (resp. **en dessous**) de toutes ses tangentes. Cette propriété peut servir à démontrer certaines inégalités usuelles, voir paragraphe 1.1.

1.5 Etude des branches infinies

- ***Asymptote verticale :*** Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $x = x_0$.
- ***Asymptote horizontale :*** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = a$. (De même pour une limite en $-\infty$.)
- ***Asymptote oblique :*** Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$, la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$. (De même en $-\infty$.)
- ***Etude d'une branche infinie dans le cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:***
  - $*$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, la courbe admet une *branche parabolique* de directionOx.
  - $*$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (ou $-\infty$), la courbe admet une *branche parabolique* de directionOy.
  - $*$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$, la courbe admet une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$.
  - $*$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = +\infty$ (ou $-\infty$), la courbe admet une *branche parabolique* de direction la droite d'équation $y = ax$.

1.6 Inégalité des accroissements finis

Théorème 5 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, telle qu'il existe un réel k tel que : $\forall x \in I$ $|f'(x)| \leq k$. Alors, pour tout couple de réels (y, z) de l'intervalle I,

$$|f(y) - f(z)| \leq k|y - z|$$

Cette inégalité s'utilise en particulier pour étudier la convergence de certaines suites (voir plus loin) et la vitesse de convergence de ces suites. On peut utiliser une autre version :

Théorème 5bis : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle qu'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f'(x) \leq M$. Alors :
$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Ce théorème est utilisé par exemple pour encadrer $ln(n)$, puis la somme partielle de la série harmonique : $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

2 Suites réelles

2.1 Généralités

Définition 8 : Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$, ou d'une partie de $\mathbb{N}$, vers $\mathbb{R}$: $n \mapsto u_n$.
u_n est le **terme général** de la suite. La suite elle-même est notée u, ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 9 : La suite u est **croissante** (resp. **décroissante**) à partir du rang n_0 si
$\forall n \geq n_0 \qquad u_{n+1} \geq u_n \qquad$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).

Définition 10 : La suite (u_n) est **convergente** si il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Elle est **divergente** si cette limite est infinie.

Définition 11 : La suite (u_n) est **majorée** à partir du rang n_0 si il existe un réel M tel que
$\forall n \geq n_0 \qquad u_n \leq M$.
Elle est **minorée** à partir du rang n_0 si il existe un réel m tel que $\quad \forall n \geq n_0 \qquad u_n \geq m$.

Etudier une suite, c'est déterminer le comportement de son terme général u_n quand n tend vers $+\infty$, en particulier dire si cette suite est convergente ou divergente.

Théorème 6 : Toute suite croissante et majorée est convergente,
toute suite décroissante et minorée est convergente.

Théorème 7 (théorème des "gendarmes") :

Soient trois suites u, v, w telles que, à partir d'un certain rang,
$u_n \leq v_n \leq w_n, \quad$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell. \quad$ Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Théorème 8 (localisation de la limite) :

Si tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiennent à un certain intervalle I, et que la suite converge vers ℓ, alors $\quad \ell \in I$, ou ℓ est l'une des bornes de I.

Théorème 9 (Composée d'une suite par une fonction continue) :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et que f est continue sur un intervalle contenant ℓ,
alors $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Théorème 10 (suites adjacentes) :

Soient deux suites u et v telles que
• u est croissante et v est décroissante.
• $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.
Alors ces deux suites convergent, vers une même limite.

2.2 Equivalence et négligeabilité

Définition 12 :

- Une suite (u_n) est **négligeable** devant une suite (v_n) si : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
  (Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \circ(v_n)$ ou plus simplement : $u_n = \circ(v_n)$.))
- Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
  (Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou plus simplement : $u_n \sim v_n$.)

Remarque : on parle en général d'équivalence entre les termes généraux des deux suites.

Propriétés

(1) $u_n \sim v_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
Attention, la réciproque est fausse : par exemple $\frac{1}{n}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{n^2}$.

(2) si $\alpha < \beta \quad n^\alpha = \circ(n^\beta)$ et $\frac{1}{n^\beta} = \circ\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

(3) $\forall \alpha > 0 \quad \ln n = \circ(n^\alpha), \quad n^\alpha = \circ(e^n), \quad e^{-n} = \circ\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

(4) Si $v_n = \circ(u_n), \qquad u_n + v_n \sim u_n$.
<u>Application</u> : Toute fonction polynôme en n est équivalente à son terme de plus haut degré.

(5) $\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ w_n \sim t_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n w_n \sim v_n t_n$ et $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$
<u>Application</u> : $\frac{2n^2 - n + 3}{5n^3 + 6} \sim \frac{2}{5n}$.

(6) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad u_n \sim v_n \Rightarrow {u_n}^\alpha \sim {v_n}^\alpha$.
Par exemple : $u_n \sim v_n \Rightarrow {u_n}^2 \sim {v_n}^2$ et $u_n \sim v_n \Rightarrow \sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

(7) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 1$, alors : $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
Attention, la réciproque est fausse.
Exemple : Trouver un équivalent simple de $\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3-3)}$. (Réponse : $\frac{2}{3}$).

2.3 Suite définie par son terme général

On a : $u_n = f(n)$, où f est une fonction réelle de variable réelle. Etudier la convergence de (u_n) revient à chercher la limite de f en $+\infty$.

2.4 Suite définie par une relation de récurrence simple

Soit une suite u_n définie par son premier terme u_0 et la relation : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2.4.1 Rappels sur les suites usuelles

Les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, sont définies par récurrence, mais on peut calculer aisément leur terme général.

(1) Suite géometrique de raison q : $u_{n+1} = qu_n, \quad u_n = u_0 q^n$
(2) Suite arithmétique de raison r : $u_{n+1} = u_n + r, \quad u_n = u_0 + nr$
(3) Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b, \quad u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$ avec $\ell = \frac{b}{1-a}$.
Cette formule n'est pas à savoir "par cœur", il faut savoir l'établir dans chaque cas particulier.

2.4.2 Théorèmes utiles

Théorème 11 (théorème "des trois si") :

Si (u_n) est convergente vers une limite ℓ, si $u_{n+1} = f(u_n)$, si f est continue sur un intervalle où se trouvent tous les termes de la suite, alors $f(\ell) = \ell$.

Théorème 12 (variations d'une suite récurrente) :

Si f est croissante sur sur un intervalle où se trouvent tous les termes de la suite, alors (u_n) est *monotone*. Pour déterminer son sens de variation il suffit de comparer les deux premiers termes.

<u>dém</u>

- Si $u_0 \leq u_1$, comme f est croissante : $u_n \leq u_{n+1} \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \leq u_{n+2}$ donc par récurrence la suite est croissante.
- Si $u_0 \geq u_1$, comme f est croissante : $u_n \geq u_{n+1} \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} \geq u_{n+2}$ donc par récurrence la suite est décroissante.

Remarque : Cette démonstration est exigible dans les problèmes de concours.

2.4.3 Méthode d'étude d'une suite récurrente

- On étudie les variations de la fonction f.
- On résout l'équation $f(x) = x$ ce qui donne les valeurs possibles d'une limite éventuelle.
- On cherche un intervalle dans lequel se trouvent tous les termes de la suite (majoration et minoration), et, dans le cas "idéal", sur lequel la fonction est croissante, et entre deux valeurs possibles de la limite.
- On peut également résoudre l'inéquation $f(x) \leq x$ pour en déduire les variations de la suite.
- On utilise les théorèmes 6, 8, 11 pour conclure.

Utilisation de l'inégalité des accroissements finis :

On suppose de plus qu'il existe un intervalle I et un réel k tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I \qquad et \qquad \forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k$$

Alors on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq |u_0 - \ell| k^n$ et on en déduit la convergence de la suite vers ℓ par le théorème des gendarmes.

cette majoration permet également d'écrire un programme Turbo-Pascal donnant un entier n à partir duquel u_n est une valeur approchée de sa limite à ϵ près, ϵ étant donné par l'utilisateur.

2.5 Suites définies implicitement

2.5.1 Suites définies par : u_n est solution de l'équation $f(x) = n$

Soit f une *bijection* d'un intervalle $[a, b]$ vers un intervalle contenant $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout entier naturel n l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n. Cela définit une suite, que l'on étudie en remarquant que $u_n = f^{-1}(n)$. L'étude revient à celle d'une suite définie par son terme général.

2.5.2 Suites définies par : u_n est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$

Soit f une *bijection* d'un intervalle $[a, b]$ vers un intervalle contenant $[0, 1]$. Alors pour tout entier naturel non nul n l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution u_n. La méthode est la même que pour le paragraphe précédent.

2.5.3 Suites définies par : u_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$

Soit (f_n) une suite de fonctions. Supposons que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n soit une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J contenant 0. Alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n sur I, ce qui définit une suite.

- *Sens de variation :* Si le sens de variation de f_{n+1} est connu, ainsi que le signe de $f_{n+1}(u_n)$, en remarquant que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ on peut en déduire l'ordre des deux nombres u_n et u_{n+1}, et donc le sens de variation de la suite.

- *Convergence :* On applique en général le théorème 6. Pour chercher un équivalent de u_n en $+\infty$ on exploite l'égalité $f_n(u_n) = 0$.

2.6 Suites définies par une relation de récurrence linéaire à deux termes

On suppose que la suite (u_n) est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1, et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b sont deux réels fixés.
On cherche des suites *géométriques* vérifiant cette relation de récurrence ; les raisons de ces suites sont solutions de *l'équation caractéristique* :

$$r^2 - ar - b = 0$$

Posons : $\Delta = a^2 + 4b$

- Si $\Delta > 0$ l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, et il existe deux réels α et β tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n$$
Pour déterminer α et β on applique cette égalité aux rangs 0 et 1, et on résout le système obtenu.
- Si $\Delta = 0$, il y a une solution unique r_1 et dans ce cas il existe deux réels α et β tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \alpha {r_1}^n + \beta n {r_1}^n$$
On obtient α et β par une méthode analogue au cas précédent.
- Si $\Delta < 0$, ce cas est hors programme.

2.7 Suites définies par une intégrale

Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies et continues sur un intervalle $[a, b]$. On étudie la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par :

$$I_n = \int_a^b f_n(t)dt$$

en utilisant la propriété de positivité de l'intégrale, le théorème de la moyenne, et le théorème des gendarmes (voir le chapitre INTEGRATION).

2.8 Suites et algèbre linéaire

Rappel : L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, muni de l'addition des suites et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel de dimension infinie.

Propriété : L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de dimension 2. Le couple des deux suites géométriques $(({r_1}^n), ({r_2}^n))$ dans le cas où $\Delta > 0$, ou $(({r_1}^n), (n{r_1}^n))$ dans le cas où $\Delta = 0$, est une base de ce SEV.

On verra en exercice d'autres exemples de SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3 Séries réelles

3.1 Généralités sur les séries

Définition 13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Le couple $((u_n), (S_n))$ est appelé **série** de terme général u_n.

S_n est la *somme partielle* de la série de terme général u_n.

Remarque : Attention au vocabulaire : on parle, en abrégé, de la *série* (u_n), qu'il ne faut pas confondre avec la *suite* (u_n).

Définition 14 : Une série de terme général u_n est *convergente* si, et seulement si, la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite finie.

La limite S de cette suite est appelée la *somme de la série* et on la note : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Théorème 13 : Si la série de terme général u_n est convergente, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Attention ! la réciproque de ce théorème est fausse, voir par exemple la série harmonique.

Théorème 14 : Si les séries (u_n) et (v_n) sont convergentes, de sommes respectives S et S', la série de terme général $u_n + v_n$ est convergente, de somme $S + S'$.
Cette propriété s'écrit : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Théorème 15 : Pour tout réel λ non nul, les séries (u_n) et (λu_n) sont de même nature, et si la série (u_n) est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

3.2 Séries usuelles

3.2.1 Série harmonique

Soit $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série est divergente, et on montre que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$. (Voir T.D.)

3.2.2 Série harmonique alternée

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série est convergente.

3.2.3 Séries de Riemann

Soit $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel strictement positif.

Théorème 16 :
- Si $\alpha > 1$ la série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente.
- Si $\alpha \leq 1$ la série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est divergente.

Exemple : La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3.2.4 Séries géométriques

Soit $u_n = u_0 q^n$ ((u_n) est une suite géométrique de raison q), alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Théorème 17 : Une série géométrique est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$ et, suivant le rang du premier terme on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$$

3.2.5 Séries associées à des séries géométriques

On retiendra que, si $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)q^{n-p} = \frac{p!}{(1-q)^{p+1}}$$

3.2.6 Série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$

Pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Cette série est utilisée pour l'étude des lois de Poisson.

3.3 Etude des séries à termes positifs

Soit une série de terme général u_n tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

Théorème 18 : Si la suite (S_n) des sommes partielles est *majorée* la série (u_n) est convergente.

dém : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc la suite (S_n) est *croissante*, et majorée par hypothèse. Elle admet donc une limite finie.

Théorème 19 : Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$. Alors :
- Si la série (v_n) converge, la série (u_n) converge aussi.
- Si la série (u_n) diverge, la série (v_n) diverge aussi.

dém : Comme la suite (S'_n) des sommes partielles de (v_n) est croissante, elle est majorée par sa limite S'. Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$, par addition d'inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq S'$$

Donc d'après le théorème précédent la série (u_n) est convergente.

De même $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq S'_n$, donc si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, il en est de même par comparaison pour S'_n, et par conséquent la série (v_n) est divergente.

On utilise ce théorème pour montrer la convergence (ou la divergence) d'une série, en utilisant comme séries de référence les séries usuelles vues ci-dessus, en particulier les séries de Riemann.

Exemple : Soit $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, alors $u_n \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc d'après les théorèmes 19 et 16, la série (u_n) est convergente.

Théorème 20 : Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors les deux séries (u_n) et (v_n) sont de même nature.

Exemple : Soit $u_n = \dfrac{n^2+5n+2}{n^4-6n+8}$. Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ la série (u_n) est convergente.

Théorème 21 : Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \circ(v_n)$, et (v_n) est convergente. Alors la série (u_n) est convergente.

Exemple : Soit $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$. Comme $\ln n \underset{n\to+\infty}{=} \circ(\sqrt{n})$, $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc la série est convergente.

3.4 Séries absolument convergentes

Définition 15 : La série de terme général u_n est absolument convergente si, et seulement si, la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Théorème 22 : Toute série absolument convergente est convergente.

Ce théorème permet de se ramener, pour des séries dont le terme général est de signe quelconque, à des séries à termes positifs ; on peut alors appliquer les théorèmes de la section précédente.

Attention ! la réciproque de ce théorème est fausse : par exemple si (u_n) est la série harmonique alternée, $|u_n| = \dfrac{1}{n}$, donc (u_n) est convergente, mais pas absolument convergente.