# Chapitre 2. Applications linéaires

## Table des matières

**1 Définitions, exemples** **2**

**2 Noyau d'une application linéaire** **3**

**3 Image d'une application linéaire** **3**

**4 Matrice d'une application linéaire** **5**

**5 Règles de calcul sur les matrices d'applications linéaires** **6**
5.1 Opérations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
5.2 Composée de deux applications linéaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
5.3 Puissances d'un endomorphisme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
5.4 Application réciproque d'un automorphisme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
5.5 Groupe linéaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

**6 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme** **7**

# 1 Définitions, exemples

***Définition 1 :***

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, et $f$ une application de $E$ vers $F$.
L'application $f$ est linéaire si, et seulement si,
$\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$
$\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

***Remarque :*** Ces deux conditions peuvent être remplacées par une seule :

$$\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

***Exemples :***

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : si $u = (x, y)$, alors $f(u) = (x^2, x + y)$ Soient $u_1 = (x_1, y_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2)$
$f(u_1 + u_2) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2)^2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$
$f(u_1) + f(u_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$
Or si $x_1x_2 \neq 0$, $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ donc l'application $f$ n'est pas linéaire.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\quad f(x, y) = 2x + 3y$
$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 2x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 3y_2 = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$
$f(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda(2x + 3y) = \lambda f(x, y)$ donc $f$ est une application linéaire.
3. Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, et $\Phi$ l'application définie par :
$$\forall f \in E \qquad \Phi(f) = f'$$
On sait que : $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$, c'est-à-dire : $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$
L'application $\Phi$, "dérivée", est donc une application linéaire.
4. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit une matrice $A$ donnée. Soit :
$$\begin{aligned} f : \quad \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM + MA \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f(\lambda M_1 + \mu M_2) &= A(\lambda M_1 + \mu M_2) + (\lambda M_1 + \mu M_2)A \\ &= A(\lambda M_1) + A(\mu M_2) + (\lambda M_1)A + (\mu M_2)A \\ &= \lambda(AM_1 + M_1A) + \mu(AM_2 + M_2A) \\ &= \lambda f(M_1) + \mu f(M_2) \end{aligned}$$
$f$ est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vers lui-même.

***Théorème 1 :***

Si $f$ est une application linéaire de $E$ vers $F$
$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

*dém :* Soit $u$ un vecteur de $E$, alors $\vec{0}_E = 0 \cdot u$, et comme $f$ est linéaire,
$f(0 \cdot u) = 0 \cdot f(u) = \vec{0}_F$.

*Conséquence :* Si cette propriété n'est pas vérifiée, $f$ n'est pas linéaire. Cela donne un critère simple pour démontrer qu'une application n'est pas linéaire.
***Exemple :*** L'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (x + y + 1, x - 2y + 3)$ n'est pas linéaire, car $f(0, 0) = (1, 3)$. Attention ! ce critère n'est pas suffisant : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ n'implique pas que $f$ est linéaire. (Voir l'exemple 1.)

***Définition 2 :***

- Une application linéaire bijective est un **isomorphisme**.
- Une application linéaire de $E$ vers $E$ est un **endomorphisme**.
- Un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

## 2 Noyau d'une application linéaire

***Définition 3 :*** Soit $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$.
Le noyau de $f$ est l'ensemble des vecteurs de $E$ dont l'image est $\vec{0}_F$.
$$Ker(f) = \{u \in E \,/\, f(u) = \vec{0}_F\}$$

***Exemple :*** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = 2x + 3y$.
$Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x + 3y = 0\} = \{(-\frac{3}{2}y, y) \,/\, y \in \mathbb{R}\} = Vect((-\frac{3}{2}, 1)) = Vect((-3,2))$
On remarque que $Ker(f)$ est l'ensemble solution d'une équation linéaire homogène : c'est un SEV de $\mathbb{R}^2$.

***Théorème 2 :*** Pour toute application linéaire $f$ de $E$ vers $F$,
$Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

*dém :* • On sait que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, donc le noyau de $f$ contient au moins le vecteur nul de $E$ : il n'est pas vide.
• Soient $u_1$ et $u_2$ deux vecteurs de $Ker(f)$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels.
$f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2) = \lambda \cdot \vec{0} + \mu \cdot \vec{0} = \vec{0}$
donc $\lambda u_1 + \mu u_2 \in Ker(f)$ : le noyau de $f$ est stable par combinaison linéaire.
• C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $E$.

***Théorème 3 :*** $f$ injective $\Leftrightarrow \quad Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

*dém :* • Supposons $f$ injective : $f(u_1) = f(u_2) \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2$.
Soit $u$ un élément de $Ker(f)$ : alors $f(u) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, donc $u = \vec{0}_E$.
• Réciproquement, supposons que $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$.
Soient $u_1$ et $u_2$ tels que $f(u_1) = f(u_2)$, alors comme $f$ est linéaire cela équivaut à : $f(u_1 - u_2) = \vec{0}_F$, c'est-à-dire $u_1 - u_2 \in Ker(f)$, donc $u_1 - u_2 = \vec{0}_E$.
on a donc bien : $f(u_1) = f(u_2) \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2$ : $f$ est injective.

## 3 Image d'une application linéaire

**Attention !** il s'agit dans ce paragraphe de **l'ensemble image** d'une application, à ne pas confondre avec l'image $f(u)$ d'un vecteur $u$ par cette même application.

***Définition 4 :*** Soit $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$.
L'image de $f$ est l'ensemble des vecteurs de $F$ qui ont au moins un antécédent par $f$.
$$Im(f) = \{v \in F \,/\, \exists u \in E \,/\, f(u) = v\}$$

***Exemple :*** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (2x - y, -4x + 2y)$.
On montre facilement que $f$ est linéaire.
• $Ker(f) = \{(x,y) \,/\, 2x - y = 0\,,\ -4x + y = 0\} = Vect((1,2))$
• $Im(f) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (a,b) = (2x - y, -4x + 2y)\}$
On cherche l'ensemble des couples $(a,b)$ tels que le système suivant ait au moins une solution :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & a \\ -4x + 2y & = & b \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & a \\ 0 & = & b + 2a \end{array}\right.$$
Le système a au moins une solution si, et seulement si, $b + 2a = 0$.
Donc : $Im(f) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2a + b = 0\} = \{(a, -2a) \,/\, a \in \mathbb{R}\} = Vect((1,-2))$.

***Théorème 4 :***

Si $f$ est une application linéaire de $E$ vers $F$,
$Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

*dém :* • $Im(f)$ est non vide car $\vec{0}_F \in Im(f)$, d'après le théorème 1.
• Soient $v_1$ et $v_2$ deux vecteurs de $Im(f)$ : il existe alors deux vecteurs $u_1$ et $u_2$ de $E$ tels que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.
Comme $f$ est linéaire, pour tous réels $\lambda$ et $\mu$ :

$$f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2) = \lambda v_1 + \mu v_2$$

donc $\lambda v_1 + \mu v_2 \in Im(f)$ : $Im(f)$ est stable par combinaison linéaire.
• C'est donc un SEV de $F$.

***Théorème 5 :***

$f$ surjective $\quad\Leftrightarrow\quad Im(f) = F$

***Définition 5 :***

Le **rang** d'une application linéaire $f$ est la dimension de $Im(f)$.

***Théorème du rang :***

***Théorème 6 :***

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie,
et $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$.
Alors : $\quad dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E)$

(*théorème admis*)

***Exemple :*** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

• $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\} = Vect((1, 0, -1), (0, 1, -1))$
• D'après le théorème du rang, $Im(f)$ est de dimension 1, et comme $f((1, 0, 0)) = (1, 1, 1)$, le vecteur $(1, 1, 1)$ est élément de $Im(f)$.
Donc $Im(f) = Vect((1, 1, 1))$.
*Autre méthode :* $Im(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (a, b, c) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)\}$
Le système induit admet au moins une solution si, et seulement si, $a = b = c$.
Donc $Im(f) = \{(a, a, a) \,/\, a \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 1, 1))$.

On peut généraliser la première méthode utilisée ci-dessus avec le théorème suivant :

***Théorème 7 :***

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$,
et $f$ une application linéaire de $E$ vers un espace vectoriel $F$.
Alors $Im(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

*dém :* Il faut démontrer que tout élément de $Im(f)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.
Soit $v$ un vecteur de $Im(f)$. Il existe donc un vecteur $u$ de $E$ tel que $f(u) = v$.
Or $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $u$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Donc comme $f$ est linéaire : $v = f(u) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n)$
$v$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.
La réciproque est évidente.

# 4 Matrice d'une application linéaire

***Définition 6 :*** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions respectives $n$ et $p$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ une base de $F$, soit $f$ une application linéaire de $E$ vers $F$ telle que
$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \ldots + a_{p1}e'_p$
$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \ldots + a_{p2}e'_p$
$\vdots$
$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \ldots + a_{pn}e'_p$
Alors la matrice de $f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Les **colonnes** de cette matrice sont donc les matrices-colonnes des coordonnées des $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

***Cas d'un endomorphisme :*** Si $f$ est un endomorphisme de $E$ (c'est-à-dire $F = E$), on prendra $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Par exemple, on définira la matrice d'un endomorphisme de $E$ relativement à la base canonique de $E$.

***Effet sur les coordonnées des vecteurs :***

Soit $u$ un vecteur quelconque de $E$, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire : $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$,

et $v = f(u)$ de coordonnées $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $v = y_1e'_1 + y_2e'_2 + \ldots + y_pe'_p$. Alors :

***Théorème 8 :*** $\boxed{Y = AX}$

***Conséquence pour la recherche du noyau et de l'image.***
***Exemple :*** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A$ relativement à la base canonique (on dira : $f$ est canoniquement associé à $A$), avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $u = (x, y, z)$ les coordonnées de $v = f(u)$ dans la base canonique sont données par :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

Donc le noyau de $f$ est l'ensemble solution dans $\mathbb{R}^3$ du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

En résolvant ce système, on trouve : $Ker(f) = \{\vec{0}\}$. De plus d'après le théorème du rang, $Im(f)$ est de dimension 3, donc : $Im(f) = \mathbb{R}^3$.
L'endomorphisme $f$ est donc injectif et surjectif, c'est-à-dire bijectif : c'est un **automorphisme** de $\mathbb{R}^3$.
Ce résultat est la conséquence du fait que le système ci-dessus est un système de Cramer, et donc que la matrice $A$ de l'endomorphisme $f$ est **inversible**.

On peut généraliser ce résultat :

| | |
|---|---|
| ***Théorème 9 :*** | Soit $f$ un endomorphisme de $E$, $A$ la matrice de $f$ relativement à une certaine base.<br>$f$ bijectif $\Leftrightarrow$ $A$ inversible $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ |

# 5 Règles de calcul sur les matrices d'applications linéaires

## 5.1 Opérations

| | |
|---|---|
| ***Théorème 10 :*** | Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$, $A$ et $B$ leurs matrices respectives relativement à une base donnée.<br>$f+g$ a pour matrice $A+B$ dans cette même base.<br>$\lambda f$ a pour matrice $\lambda A$<br>$\lambda f + \mu g$ a pour matrice $\lambda A + \mu B$ |

Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$.
Sur cet ensemble, on a défini l'addition et la multiplication par un réel, de façon analogue aux espaces vectoriels de fonctions.
Le théorème précédent permet de dire que ces opérations fonctionnent de la même façon que l'addition et la multiplication par un réel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $n$ est la dimension de $E$. Or pour ces opérations, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, de dimension $n^2$. On a donc :

| | |
|---|---|
| ***Théorème 11 :*** | L'ensemble $\mathcal{L}(E)$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. |

***Cas de l'endomorphisme identique :***
On note $id$ l'endomorphisme de $E$ qui à tout vecteur $u$ de $E$ associe ce même vecteur :

$$\forall u \in E \qquad id(u) = u$$

Alors dans n'importe quelle base de $E$, la matrice de $id$ est $I_n$ (ou plus simplement $I$), c'est-à-dire la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
*Exemple utile :* Pour tout réel $\lambda$, $A - \lambda I$ est la matrice de l'endomorphisme $f - \lambda id$.
cet endomorphisme vérifie : $(f - \lambda id)(u) = f(u) - \lambda u$.

## 5.2 Composée de deux applications linéaires

***Exemple :*** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par :
$f(x,y) = (2x-4y, 5x+y)$ et $g(x,y) = (3x+2y, x-y, x+y)$
Alors

$$\begin{aligned} g \circ f(x,y) &= g(2x-4y, 5x+y) \\ &= (3(2x-4y)+2(5x+y), (2x-4y)-(5x+y), (2x-4y)+(5x+y)) \\ &= (16x-10y, -3x-5y, 7x-3y) \end{aligned}$$

Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et celle de $\mathbb{R}^3$, les matrices respectives de $f$, $g$, et $g \circ f$ sont :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 16 & -10 \\ -3 & -5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

On constate que : $BA = C$.
On peut généraliser ce résultat :

***Théorème 12 :*** Soient $E, F, G$ des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$,
$f : E \to F$, $g : F \to G$,
$A$ la matrice de $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$,
$B$ la matrice de $g$ relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$,
alors $g \circ f$ apour matrice $BA$ relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$.

### 5.3 Puissances d'un endomorphisme

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, et $A$ la matrice de $f$ relativement à une certaine base $\mathcal{B}$.
D'après le théorème précédent, $f \circ f$ a pour matrice $A^2$ dans cette même base.
On notera $f^2$ l'endomorphisme $f \circ f$.
De même, on note : $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ la composée de $n$ fois l'endomorphisme $f$.
Alors $f^n$ a pour matrice $A^n$, relativement à la base donnée.

### 5.4 Application réciproque d'un automorphisme

Soit $f$ une application linéaire bijective de $E$ vers $E$, c'est-à-dire un automorphisme de $E$, et soit $A$ sa matrice par rapport à une base $\mathcal{B}$ donnée.
Soit $f^{-1}$ l'application réciproque de $f$, alors :

***Théorème 13 :*** La matrice de $f^{-1}$ est $A^{-1}$.

*dém :* On sait que $f \circ f^{-1} = id$, donc si $A'$ est la matrice de $f^{-1}$, $AA' = I$, d'où $A' = A^{-1}$.

On retrouve le fait qu'un endomorphisme $f$ d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si, et seulement si, sa matrice (dans une base quelconque de $E$), est inversible.

### 5.5 Groupe linéaire

La composition des endomorphismes est une loi de composition interne dans l'ensemble $\mathcal{L}(E)$. On sait déjà qu'elle est associative (mais pas commutative), et que l'élément neutre pour cette loi interne est l'endomorphisme identique, noté $id$.
Cet ensemble a-t-il une structure de groupe pour la composition des endomorphismes ?
Il faudrait pour cela que tout endomorphisme admette une réciproque, ce qui n'est le cas que pour les automorphismes. Donc :

***Théorème 14 :*** L'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de $E$ muni de la loi $\circ$ est un groupe.
Il est appelé **groupe linéaire** de $E$.

On remarquera que ce groupe n'est pas abélien, et que sa structure correspond à celle de l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $n$ est la dimension de $E$.

## 6 Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$, et soit $f$ un endomorphisme de $E$, $u$ un vecteur quelconque de $E$.

Soient $A$ la matrice de $f$ relativement à $\mathcal{B}$
$A'$ la matrice de $f$ relativement à $\mathcal{B}'$
$P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$
$X$ la matrice-colonne des coordonnées de $u$ relativement à $\mathcal{B}$
$X'$ la matrice-colonne des coordonnées de $u$ relativement à $\mathcal{B}'$
$Y$ la matrice-colonne des coordonnées de $f(u)$ relativement à $\mathcal{B}$
$Y'$ la matrice-colonne des coordonnées de $f(u)$ relativement à $\mathcal{B}'$
D'après les relations démontrées dans les paragraphes précédents, on a :

$$\begin{cases} X = PX' \\ Y = PY' \\ Y = AX \\ Y' = A'X' \end{cases}$$

On en déduit : $PY' = Y = AX = APX'$, d'où : $\quad Y' = P^{-1}APX'$
En comparant avec la dernière des égalités ci-dessus, on en déduit :

***Théorème 15 :*** $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

***Exemple :*** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Soit $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (0, 1, -1)$, et $u_3 = (1, 1, 2)$.

1. Montrer que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$ .
2. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$. En déduire la matrice $A'$ de $f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.
3. Donner la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et calculer $P^{-1}$.
4. Vérifiez que $A' = P^{-1}AP$.

***Réponse partielle :***

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

donc : $f(u_1) = -u_1, \quad f(u_2) = -u_2, \quad f(u_3) = 3u_3$

La matrice de $f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$ est donc :

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

D'autre part le calcul donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie aisément : $A' = P^{-1}AP$.

L'objectif de nombreux problèmes sera de trouver une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme $f$ donné est “simple”, en particulier de trouver une base, si elle existe, dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.