Chapitre 1. Espaces vectoriels

Table des matières

1 Systèmes linéaires

1.1 Généralités

- Soit A une matrice à n lignes et p colonnes : $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$.
  Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne inconnue à p coefficients.
  L'égalité $AX = B$ définit un système linéaire de n équations à p inconnues, $x_1, x_2, \dots x_p$.
- la **matrice complète du système** est : $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$
- Résoudre ce système, c'est déterminer l'ensemble des p-uples de réels $(x_1, x_2, \dots x_p)$ tels que l'égalité $AX = B$ soit vérifiée. Cet ensemble est appelé **ensemble solution du système**.
  Suivant le contexte, on résoudra le système soit dans $\mathbb{R}^p$ (on cherche alors un ensemble de $p-$uples de réels), soit dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (on cherche alors un ensemble de matrices-colonnes à p coefficients réels).
- Deux systèmes linéaires sont **équivalents** si, et seulement si, ils ont le même ensemble solution.
  On peut transformer un système linéaire en un système équivalent avec les opérations sur les lignes :

$$\begin{array}{lcll} L_i & \longleftrightarrow & L_j & \\ L_i & \longleftarrow & \alpha L_i & \text{avec} \quad \alpha \neq 0 \\ L_i & \longleftarrow & L_i + \lambda L_j & \end{array}$$

  Remarque : La combinaison des deux dernières transformations donne : $L_i \longleftarrow \alpha L_i + \lambda L_j \quad \text{avec} \quad \alpha \neq 0$
  Attention ! Ne jamais multiplier une ligne par un coefficient susceptible de s'annuler.
- Si B est la matrice colonne nulle, le système est dit **homogène**.
  Dans ce cas, l'ensemble solution contient au moins la solution nulle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Un système linéaire de n équations à n inconnues est un **système de Cramer** si, et seulement si, il admet une solution unique.
  Cas particulier : Un système de Cramer homogène a pour seule solution la solution nulle.

1.2 Méthode de résolution d'un système linéaire (S)

Etape n°1 : A l'aide d'opérations sur les lignes comme défini ci-dessus, écrire un système équivalent à (S) qui soit **triangulaire** :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1 & \cdots & & & & \cdots & b'_1 \\ 0 & a_2 & & & & & b'_2 \\ 0 & 0 & a_3 & & & & b'_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & b'_n \end{array}\right)$$

Dans ce système, les coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls, ceux qui sont au-dessus de la diagonale sont quelconques.
Quand le système est triangulaire, les coefficients diagonaux sont appelés **pivots**.

Définition 1 : Le rang d'un système linéaire est le nombre r de ses pivots non nuls, ce système étant écrit sous forme triangulaire.

Le système est alors constitué de r équations dites **principales** et de $n-r$ équations du type : $(0\,0\,\dots\,0|\beta)$.

Etape n°2 : Si le système comporte des équations du type $(0\,0\,\dots\,0|\beta)$ avec $\beta \neq 0$, le système n'a pas de solution.

Sinon, en éliminant les équations dont tous les coefficients sont nuls, on obtient un système de r équations à p inconnues, avec $r \leq p$.

Etape n°3 :
• Si $r = p$: on a un système de r équations à r inconnues, triangulaire, tel que tous les pivots sont non nuls. C'est donc un système de Cramer, qui a une solution unique.
• Si $r < p$: Le système admet alors une infinité de solutions. On choisit r **inconnues principales**, les autres sont alors $p-r$ **inconnues auxiliaires**. On écrit les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires, qui sont alors considérées comme des paramètres.
Cas particulier : Si l'une des inconnues ne figure plus dans le système triangulaire, elle peut prendre toutes les valeurs réelles possibles et devient automatiquement une inconnue auxiliaire.

Exemple : L'ensemble solution dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation $x - 3z = 0$ est $S = \{(3z, y, z) \,/\, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

1.3 Matrices inversibles

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice A^{-1} telle que le produit de ces deux matrices soit égal à I_n, la matrice identité d'ordre n :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Proposition : Une matrice A carrée d'ordre n est inversible si, et seulement si, pour toute matrice colonne Y d'ordre n, le système linéaire $AX = Y$ est un système de Cramer.

Pour calculer A^{-1}, on considère Y comme une matrice colonne paramètre, et on résout le système $AX = Y$. On obtient alors : $X = A^{-1}Y$ ce qui donne les coefficients de la matrice A^{-1}.

2 Structures algébriques, espaces vectoriels

2.1 Lois de composition

Soit E un ensemble.

Définition 2 : Une **loi de composition interne** est une application de $E \times E$ vers E.
Autrement dit, à tout couple (a, b) d'éléments de E, la loi interne associe un troisième élément de E.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}$, l'addition : à tout couple de réels on associe leur somme : $(a, b) \mapsto a + b$
2. Dans $\mathbb{R}$, la multiplication : à tout couple de réels on associe leur produit.
3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'addition des matrices est définies par : si $A = (a_{ij})$ et $B = (bij)$, alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
4. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de variable réelle définies sur $\mathbb{R}$. On définit l'addition des fonctions par : si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, $f + g$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
5. On définit de même la multiplication des fonction par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$
6. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ la composition des fonctions est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f \circ g(x) = f(g(x))$$
7. Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. Les opérations $\cup$ et $\cap$ sont des lois de composition internes sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition 3 : Soit un ensemble E muni de la loi de composition interne notée $*$.
Un sous-ensemble F de E est dit **stable** pour la loi $*$ si, et seulement si,
$\forall a \in F, \quad \forall b \in F, \quad a * b \in F$.

Autrement dit, F est stable pour la loi $*$ ssi $*$ est une loi de composition interne pour F.

Exemples :

1. Prenons l'addition dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition, et stable pour la multiplication. En effet la somme et le produit de deux entiers naturels sont des entiers naturels.
2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La somme de deux matrices diagonales est diagonale : D est stable pour l'addition des matrices. De même D est stable pour la multiplication des matrices.
3. Soit $E = \mathbb{N}$, et F l'ensemble des entiers impairs. F n'est pas stable pour l'addition.

Définition 4 : Une **loi de composition externe** sur E (ou loi externe) est une application de $\mathbb{R} \times E$ vers E : à tout couple (λ, a) formé d'un réel λ et d'un élément a de E, on associe un élément de E noté $\lambda \cdot a$.

On étudiera une seule loi externe, sur différents ensembles E, appelée **multiplication par un réel**.

Exemples :

1. Soit $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La multiplication par un réel sur cet ensemble est définie par :
   Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ la multiplication par un réel est définie par : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \quad \lambda f$ est la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Définition 5 : Un sous-ensemble F de E est dit stable pour la multiplication par un réel si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall a \in F \quad \lambda \cdot a \in F$

Exemples : Prenons deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

• Soit $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$. Alors $\lambda \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \\ \lambda x \end{pmatrix}$ donc F_1 est stable pour la loi externe.

• Soit $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$. Alors $\lambda \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda x + \lambda \\ \lambda x + 2\lambda \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda x + 1 \\ \lambda x + 2 \end{pmatrix}$ donc F_2 n'est pas stable pour la loi externe.

2.2 Structure de groupe

Définition 6 : Soit E un ensemble, muni d'une loi de composition interne notér $*$. $(E, *)$ est un **groupe** si :
• La loi $*$ est **associative** : $\forall (a, b, c) \in E \quad a * (b * c) = (a * b) * c$
• Il existe dans E un **élément neutre** e pour la loi $*$: $\forall a \in E \quad a * e = e * a = a$
• Tout élément a de E admet un **symétrique** a' dans E, tel que : $a * a' = a' * a = e$
• De plus si la loi $*$ est **commutative**, le groupe $(E, *)$ est dit **commutatif**, ou abélien.

Exemples :

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. L'élément neutre est 0. Le symétrique d'un réel pour l'addition est son **opposé**.
2. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car les entiers non nuls n'ont pas d'opposé dans $\mathbb{N}$.
3. $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas de symétrique pour la multiplication, c'est-à-dire d'inverse. Par contre, $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif. L'élément neutre pour la multiplication est 1.
4. L'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 muni de l'addition des matrices est un groupe abélien. L'ensemble E des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un groupe non abélien (la multiplication des matrices n'est pas commutative). Dans cet ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'élément neutre pour l'addition est la matrice nulle, et l'élément neutre pour la multiplication est la matrice identité.

2.3 Structure d'espace vectoriel

Définition 7 :

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe (multiplication par un réel notée $\cdot$).
$(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ si et seulement si :
(1) l'addition est associative
(2) l'addition est commutative
(3) il existe un élément neutre pour l'addition, appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$
(4) tout élément u de E a un symétrique pour l'addition, noté $-u$ et appelé opposé de u
(5) $\forall u \in E \quad 1 \cdot u = u$
(6) $\forall (u, v) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
(7) $\forall u \in E \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
(8) $\forall u \in E \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**.

Exemples :

1. Soit $E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$
   On définit l'addition des couples de réels, et la multiplication d'un couple de réels par un réel, par :
   • Si $u = (x, y)$ et $v = (z, t)$, alors $u + v = (x + z, y + t)$
   • Si $u = (x, y)$, alors $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$
   En vérifiant les 8 propriétés, on montre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
   Le vecteur nul est le couple (0,0), l'opposé d'un vecteur $u = (x, y)$ est $-u = (-x, -y)$.

   De même, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uples de réels, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le vecteur nul est (0,0,...,0) et le reste est défini sur le même modèle que $\mathbb{R}^2$.
2. Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   Le vecteur nul de cet espace vectoiel est la matrice dont tous les coefficients sont nuls (matrice nulle) et l'opposé d'une matrice est le produit de cette matrice par -1.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I. En prenant les définitions de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel vues au paragraphe précédent, $(\mathcal{F}(I), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles. On définit la somme de deux suites en additionnant les termes généraux de ces deux suites, et la multiplication par un réel λ en multipliant chaque terme de la suite par le réel λ.
   Muni de ces deux lois, $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On le note aussi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque : Les 4 “familles” d'espaces vectoriels définis ci-dessus constituent les **espaces vectoriels de référence** : on n'aura plus besoin de démontrer que ce sont des espaces vectoriels.

Définition 8 :

Soit E un espace vectoriel, u et v deux éléments de E, λ et μ deux réels.
Le vecteur $\lambda u + \mu v$ est une combinaison linéaire de u et v.

De même, on peut généraliser : une combinaison linéaire de k vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_k$ est un vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des nombres réels.

Exemple : Soit $u = (1, 2)$, $v = (3, -1)$. Montrer que $w = (5, 3)$ est une combinaison linéaire de u et v.

2.4 Sous-espaces vectoriels

Définition 9 :

Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** de E s'il est lui-même un espace vectoriel.

Théorème 1 (théorème de caractérisation) :

Soit F un sous-ensemble de E. F est un sous-espace vectoriel si, et seulement si :
• $F \neq \emptyset$
• F est stable pour l'addition : $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F$
• F est stable pour la multiplication par un réel : $\forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in F$

Remarque : Les deux propriétés de stabilité peuvent se résumer en une seule : la stabilité de F par combinaison linéaire, ce qui donne :

Théorème 1bis :

Soit F un sous-ensemble de E. F est un sous-espace vectoriel si, et seulement si :
• $F \neq \emptyset$
• F est stable par combinaison linéaire : $\forall (u, v) \in F^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda u + \mu v \in F$

Exemples :

1. Si $\vec{0}$ est le vecteur nul d'un espace vectoriel E, $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   En effet,$\{\vec{0}\}$ est évidemment non vide et stable pour l'addition.
   D'autre part, $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda(u + (-u)) = \lambda u + (-\lambda)u = \lambda u - \lambda u = \vec{0}$
   (Cette suite d'égalités est possible grâce aux propriétés qui définissent un espace vectoriel.)
2. Soit $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(I)$.
   La somme de deux fonctions continues sur I est continue sur I, le produit d'une fonction continue sur I par un réel l'est aussi. Donc $\mathcal{C}^0(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I)$, et par conséquent c'est un espace vectoriel.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, 0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.
   F est non vide car, par exemple, $(0, 0) \in F$.
   Soient $u_1 = (x_1, 0)$ et $u_2 = (x_2, 0)$ deux éléments de F, et soient λ et μ deux réels.
   $\lambda u_1 + \mu u_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2, 0)$ donc $\lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. F est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ (et même de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$!). On sait que la somme de deux fonctions polynômes en est une et de même pour le produit par un réel. $\mathbb{R}[X]$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, et donc un espace vectoriel.
5. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, n étant un entier naturel fixé.
   • Si d°$(P) \leq n$ et d°$(Q) \leq n$, alors d°$(P + Q) \leq$Sup(d°(P),d°$(Q)) \leq n$. Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable pour l'additiondes fonctions.
   • Si $\lambda \neq 0$, les polynômes P et λP ont même degré, et si $\lambda = 0$, λP est le polynôme nul. Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable pour la multiplication par un réel.
   $\mathbb{R}_n[X]$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et donc lui-même un espace vectoriel.

Conclusion : On peut ainsi construire toutes sortes d'espaces vectoriels, comme sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de référence.
De plus, pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on n'utilisera jamais la définition, mais on démontrera que l'ensemble en question est un SEV de l'un des espaces vectoriels de référence, en utilisant l'une des 2 versions du théorème de caractérisation.

Théorème 2 : Le vecteur nul de E appartient à tout SEV de E.

dém : Si F est un SEV de E, il est stable pour la multiplication par un réel, et il est non vide :
Soit u un élément de F, alors $0 \cdot u \in F$, c'est-à-dire $\vec{0} \in F$.

Conséquence : Si un sous-ensemble F de E ne contient pas le vecteur nul, ce n'est pas un SEV de E.

Exemple : Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \,/\, x \in \mathbb{R} \right\}$. Comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F, ce n'est pas un SEV de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Théorème 3 : L'intersection de deux SEV de E est un SEV de E.

dém : Soient F_1 et F_2 deux SEV de E.
• Comme $\vec{0} \in F_1$ et $\vec{0} \in F_2$, $\vec{0} \in F_1 \cap F_2$: $F_1 \cap F_2$ est non vide.
• Soient u et v deux vecteurs appartenant à $F_1 \cap F_2$, et soient λ et μ deux réels. Alors comme F_1 est stable par combinaison linéaire, $\lambda u + \mu v$ appartient à F_1. De même $\lambda u + \mu v$ appartient à F_2. Donc $\lambda u + \mu v \in F_1 \cap F_2$. Par conséquent $F_1 \cap F_2$ est stable par combinaison linéaire.

Remarque : Ce théorème se généralise à un nombre quelconque de SEV de E. (Démonstration par récurrence.)

Théorème 4 : L'ensemble solutions, dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'un système linéaire homogène de p équations à n inconnues est un SEV de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

dém : (dans $\mathbb{R}^3$, à généraliser). Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, ax + by + cz = 0\}$, où a, b, c sont des réels fixés.
• F est non vide car il contient le vecteur nul (0,0,0).
• Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs quelconques de F et soient λ et μ deux réels. Alors $\lambda u_1 + \mu u_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$. Or :
$a(\lambda x_1 + \mu x_2) + b(\lambda y_1 + \mu y_2) + c(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(ax_1 + by_1 + cz_1) + \mu(ax_2 + by_2 + cz_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$
• donc $\lambda u_1 + \mu u_2$ appartient à F : F est stable par combinaison linéaire.
Or tout ensemble solution d'un système linéaire homogène dans $\mathbb{R}^3$ est une intersection d'ensembles du même type que F, donc d'après le théorème 3, c'est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

2.5 Sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème 5 : Soit E un espace vectoriel et $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces p vecteurs est un SEV de E.

Définition 10 : L'ensemble des combinaisons linéaires de ces p vecteurs est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$.
Notation : $Vect(u_1, u_2, \dots, u_p) = \{x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_p u_p \,/\, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p\}$

Exemples :

1. Soit $F = \{(x, 2x + 3y, x - 5y) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, alors $F = Vect((1, 2, 1), (0, 3, -5))$
2. Soient $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + y - z = 0\}$ et $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$.
   Cherchons des vecteurs qui engendrent respectivement F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$.
   $F_1 = \{(x, y, 2x + y) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 0, 2), (0, 1, 1))$
   $F_2 = \{(x, y, -x - y) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 0, -1), (0, 1, -1))$
   D'autre part, en résolvant le système des deux équations à 3 inconnues définissant respectivement F_1 et F_2, on obtient :
   $F_1 \cap F_2 = \{(2z, -3z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = \{z(2, -3, 1) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = Vect((2, -3, 1))$

Définition 11 : Un sous-espace vectoriel engendré par un seul vecteur non nul est une **droite vectorielle**.

Définition 12 : Deux vecteurs u et v sont dits **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel α tel que $v = \alpha u$. Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires s'ils appartiennent à la même droite vectorielle.

Remarques :
• Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel autre vecteur de E : En effet, $\vec{0}_E = 0 \cdot u$, quel que soit u dans E.
• La droite vectorielle $Vect(u)$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u.
• Si une droite vectorielle F est engendrée par un vecteur u, elle est également engendrée par tout vecteur non

nul colinéaire à u : si $\alpha \neq 0$, $Vect(u) = Vect(\alpha u)$.
Par exemple, $Vect\left(\left(\frac{1}{30}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{5}\right)\right) = Vect((1,5,-6))$

2.6 Familles libres

Définition 13 : Une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E est dite **libre** si, et seulement si :
$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \qquad x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_pu_p = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$
Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite **liée**.
Les vecteurs d'une famille libre sont dits **linéairement indépendants**.
Les vecteurs d'une famille liée sont dits **linéairement dépendants**.

Exemple 1 : Soient $u = (a,b)$ et $v = (c,d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$xu + yv = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$
La condition pour que ce système soit de Cramer est $ad - bc \neq 0$. Donc la famille $\{u, v\}$ est libre si, et seulement si, les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires.
Le théorème suivant généralise ce résultat.

Théorème 6 : **Deux** vecteurs de E forment une famille libre si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

Attention ! Ce critère ne marche pas avec plus de 2 vecteurs.

Exemple 2 : Soit dans $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (-1,2,4)$, $\quad u_2 = (3,1,-2)$, $\quad u_3 = (2,3,2)$. On cherche si l'implication : $xu_1 + yu_2 + zu_3 = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0$ est vraie.
Pour cela supposons que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = \vec{0}$, c'est-à-dire $(-x + 3y + 2z, 2x + y + 3z, 4x - 2y + 2z) = (0,0,0)$.
Cette équation se traduit par un système linéaire homogène écrit sous forme de matrice complète :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Ce système a une infinité de solutions : l'implication n'est pas vérifiée, et donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée.
On aurait pu remarquer que $u_3 = u_1 + u_2$: il existe bien une combinaison linéaire de ces 3 vecteurs, avec des coefficients non tous nuls, qui est égale au vecteur nul. On en déduit immédiatement que la famille est liée.

Exemple 3 : Soient $u_1 = (-1,1,0)$, $u_2 = (3,1,-2)$, $u_3 = (2,3,2)$, $u_4 = (1,1,1)$.
L'équation vectorielle $xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = \vec{0}$ se traduit par un système homogène de 3 équations à 4 inconnues : il a donc une infinité de solutions, et par conséquent la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une famille liée.
En généralisant ce raisonnement, on constate qu'une famille de plus de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est une famille liée.

Théorème 7 :
- Une famille libre de $\mathbb{R}^n$ a **au maximum** n vecteurs.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Exemple 4 : Soient $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (-3,3,0)$, $u_3 = (1,1,1)$.
Comme u_1 et u_2 sont colinéaires, $\{u_1, u_2\}$ est une famille liée, donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est aussi une famille liée.

2.7 Familles génératrices

Définition 14 : Une famille de p vecteurs de E est génératrice de E si, et seulement si, tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces p vecteurs.

Autrement dit : $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E ssi, pour tout vecteur u de E, il existe des réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tels que $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_pu_p$.

Ou encore : $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de E ssi $E = Vect(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $u = (a, b)$ et $v = (c, d)$, et soit $w = (e, f)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.
Existe-t-il des réels x et y tels que $w = xu + yv$?
Cette équation se traduit par le système linéaire suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{array}\right.$$
et on cherche à savoir, si pour toutes valeurs de e et f le système admet au moins une solution (x, y).
(x et y sont les inconnues du système, e et f sont des paramètres.)
Or ce système est un système de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$, c'est-à-dire si les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires. Si ce n'est pas un système de Cramer, il existe des valeurs des paramètres pour lesquelles il n'a pas de solution.
Donc la famille $\{u, v\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, elle est libre.
2. Soit $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (2, 4)$ et $u_3 = (-1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On considère un vecteur quelconque $w = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$. L'équation $xu_1 + yu_2 + zu_3 = w$ se traduit par un système de 2 équations à 3 inconnues :
$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = a \\ 2x + 4y + z = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = a \\ -2y + 3z = b - 2a \end{array}\right.$$
Ce système a une infinité de solutions, et ceci quelles que soient les valeurs de a et b.
La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^2$.
3. Reprenons l'exemple 2 du paragraphe précédent, et soit $w = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
L'équation vectorielle, de paramètre w, $xu_1 + yu_2 + zu_3 = w$ se traduit par le système, sous forme de matrice complète :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & a \\ 2 & 1 & 3 & b \\ 4 & -2 & 2 & c \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 7 & 7 & b + 2a \\ 0 & 10 & 10 & c + 4a \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & (b + 2a)/7 \\ 0 & 0 & 0 & -8a + 10b - 7c \end{array}\right)$$
Ce système n'a pas de solutions quand $-8a + 10b - 7c \neq 0$, ce qui est le cas pour une infinité de vecteurs w.
Donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $v_1 = (2, 1, -3)$, $v_2 = (4, 5, -2)$, et $v_3 = (1, 1, 1)$. Pour tout vecteur $w = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, on cherche s'il existe des réels x, y, z tels que $w = xv_1 + yv_2 + zv_3$.
cette équation se traduit par un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues, et en mettant ce système sous forme triangulaire on constate que c'est un système de Cramer. De plus le fait que ce soit un système de Cramer ne dépend pas du second membre, c'est-à-dire des réels a,b et c. Donc quels que soient ces réels, le système admet une solution unique.
La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.
De plus si le second membre est nul on a aussi un système de Cramer : la famille est donc libre.
Généralisation : Soit une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Cette famille est libre si et seulement si elle est génératrice.
5. Soit $w_1 = (1, 2, 4)$, et $w_2 = (3, 1, -1)$. L'équation $w = (a, b, c) = xw_1 + yw_2$ se traduit par un système de 3 équations à 2 inconnues : il n'y a pas de solutions pour tout triplet (a, b, c).
Cette famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 8 :

- Une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ a au minimum n vecteurs.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

2.8 Bases

Définition 15 : Un p-uple de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une **base** de E si, et seulement si, ses p vecteurs constituent une famille **libre** et **génératrice** de E.

Théorème 9 : Soit u un vecteur de E et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de E.
Alors il existe un unique p-uple de réls $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tel que
$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_pu_p$.

Définition 16 : Le p-uple de réels $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ constitue les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple : Soit $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (3, 4)$. D'après les résultats des paragraphes précédents, (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur $(5, 6)$ a pour coordonnées $(-1, 2)$ par rapport à la base (u_1, u_2), c'est-à-dire que :

$$(5, 6) = -u_1 + 2u_2$$

Remarque 1 : (u_2, u_1) est également une base de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées du vecteur (5,6) dans cette base sont $(2, -1)$.

Remarque 2 : Dans la base (u_1, u_2) les coordonnées de u_1 sont $(1, 0)$ et celles de u_2 sont $(0, 1)$.

Théorème 10 : Si un espace vectoriel E a une base de p vecteurs, toutes ses bases comportent p vecteurs.

Définition 17 : Le nombre de vecteurs d'une base de E est appelé la **dimension** de E.

Cas particulier : Pour tout espace vectoriel E, on sait que $\{\vec{0}_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Par convention, on dit qu'il est de dimension 0.

Exemple fondamental : la base canonique. la base canonique d'un espace vectoriel est la base dans laquelle les coordonnées d'un vecteur sont les coefficients qui le définissent.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique est (e_1, e_2) avec $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$. En effet pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a : $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2$.

2. de même, dans $\mathbb{R}^n$ soit $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Pour tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.
Le vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a pour coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans cette base : $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ toute matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le quadruplet $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Plus généralement, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n) on pose Δ_{ij} la matrice dont le coefficient de la ligne i et la colonne j est 1, tous les autres étant nuls.
Alors $(\Delta_{ij} \,/\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Dans $\mathbb{R}_n[X]$ tout polynôme P s'écrit : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.
On note aussi (polynôme formel) : $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$
Les nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les coefficients du polynôme P.
Soit e_k le polynôme défini par : $e_k(x) = x^k$. Alors $P = a_0e_0 + a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$:
$(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On la note aussi : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Remarques :

1. Ces bases canoniques nous indiquent la dimension de chacun des espaces vectoriels ci-dessus :

$\boxed{\dim(\mathbb{R}^n) = n}$ $\boxed{\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2}$ $\boxed{\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1}$

2. Les espaces vectoriels $\mathcal{F}(I)$ (ensemble des fonctions définies sur un intervalle I), $\mathcal{C}(I)$ (ensemble des fonctions continues sur un intervalle I), $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites réelles), $\mathbb{R}[X]$ (ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels) n'admettent pas de base : ils sont de **dimension infinie**.

Théorème de la base incomplète

Théorème 11 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $p < n$.
Toute famille libre de p vecteurs peut être complétée en une base de E.

Par exemple, si on prend deux vecteurs u_1 et u_2 non colinéaires de $\mathbb{R}^3$, on peut toujours trouver un troisième vecteur u_3 tel que (u_1, u_2, u_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

2.9 Bases et dimensions des sous-espaces vectoriels

Exemple 1 : Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - 4y + 5z = 0\}$.
F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $F = Vect((4, 1, 0), (-5, 0, 1))$.
Les deux vecteurs $u_1 = (4, 1, 0)$ et $u_2 = (-5, 0, 1)$ forment une famille génératrice de F, et comme ils ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre.
Donc (u_1, u_2) est une base de F, et F est de dimension 2.

Exemple 2 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n la matrice identité d'ordre n, et $F = \{xA + yI_n \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
Si A n'est pas une matrice scalaire, c'et-à-dire si elle n'est pas colinéaire à I_n, F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode : Pour trouver une base d'un SEV F d'un espace vectoriel E, il faut l'écrire comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, c'est-à-dire comme **l'ensemble des combinaisons linéaires** de ces vecteurs : la famille de vecteurs mise en évidence est une famille **génératrice** de F.
On vérifie alors que c'est une famille **libre**. On obtient ainsi une **base** de F, et le nombre de vecteurs de cette base est la **dimension** de F.

Théorème 12 : Soit E un espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors $dim(F) \leq dim(E)$, et si $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$.

dém : Posons $n = dim(E)$, et $k = dim(F)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de F, alors c'est une famille libre de k vecteurs. Or on sait que le nombre maximum de vecteurs d'une famille libre de E est n. Donc $k \leq n$.
On admettra la deuxième partie du théorème.

Théorème 13 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une famille libre de n vecteurs de E.
Alors $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E.

dém : Soit $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une famille libre de n vecteurs de E, et $F = Vect(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Alors F est un SEV de dimension n de E, donc d'après le théorème 12, $F = E$.

2.10 Changement de base

Définition 1 : Soient deux bases d'un espace vectoriel E :
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.
Soit a_{ij} la i-ème coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.
La matrice $P = (a_{ij})$ est la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

Théorème 14 : Soit u un vecteur de E, X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$, X' la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
Alors : $\qquad X = PX'$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, et soit $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (2, 1, 3)$, et $u_3 = (0, 2, 1)$.
On montre que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre, et donc que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on appelle $\mathcal{B}'$.
Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Les réels a, b, et c sont donc les coordonnées de u dans la base canonique. Appelons a', b' et c' ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc :

$$u = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3$$

. Cette égalité vectorielle se traduit par le système linéaire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ -1 & 1 & 2 & b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & 2 & a+b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & a+b-c \end{array}\right)$$

d'où : $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Posons : $\quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\quad X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

On a, d'après le calcul précédent, $X' = P^{-1}X$, et $X = PX'$.

On vérifie que les colonnes de la matrice P sont les matrices-colonnes des coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans la base canonique.

Cas d'un espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

On a vu que la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, avec $e_k(x) = x^k$.
Soit les polynômes Q_k définis par : $Q_k(x) = (x + a)^k$, où a est une constante fixée.
Montrons que $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ est une famille libre.
Pour cela, on suppose que les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont tels que $a0Q_0 + a_1Q_1 + \ldots + a_nQ_n = 0$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a_0 + a_1(x + a) + a_2(x + a)^2 + \ldots + a_n(x + a)^n = 0$$

On pose $y = x + a$ (changement de variable) et cette équation devient alors :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad a_0 + a_1y + a_2y^2 + \ldots + a_ny^n = 0$$

c'est-à-dire : $a_0e_0 + a_1e_1 + \ldots a_ne_n = 0$.
Or comme la base canonique est une famille libre, ceci entraîne : $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.
Comme la famille $\{Q_k \,/\, 0 \leq k \leq n\}$ comporte $n + 1$ vecteurs, c'est-à-dire la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

la matrice de passage de la base canonique vers la base $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ se calcule en prenant pour colonnes les coordonnées des Q_k par rapport à la base canonique, c'est-à-dire en développant les $(x + a)^k$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.