# Chapitre 11. Formules de Taylor et développements limités

## Table des matières

# 1 Formule de Taylor avec reste intégral

***Théorème 1 :*** Soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$,
et $a$ et $b$ deux réels de $I$, alors :
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Ceci est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n$, appliquée à $f$, entre $a$ et $b$.
Le reste intégral est $R_n = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$.
La formule peut s'écrire, avec la convention $f^{(0)}(a) = f(a)$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

*dém :* • Pour $n = 0$, la formule s'écrit : $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$, elle est donc vraie car $f$ est une primitive de $f'$ !
• Supposons la formule vraie au rang $n$, et que $f$ est de classe $C^{n+2}$ sur $I$, c'est-à-dire que la fonction $f^{(n+2)}$ est continue sur un intervalle contenant $a$ et $b$.
On effectue une intégration par parties sur le reste intégral, en posant :
$$\begin{cases} u(t) = f^{(n+1)}(t) & u'(t) = f^{(n+2)}(t) \\ v'(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!} & v(t) = -\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$
d'où : $R_n = \left[-f^{(n+1)}(t)\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b + \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + R_{n+1}$
En remplaçant $R_n$ par sa valeur, on obtient la formule à l'ordre $n+1$.

***Remarque :*** Si $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ contenant $0$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre $0$ et $x$, pour tout $x$ de $I$. Cela donne :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

***Application à la démonstration d'inégalités classiques :***

***Exemple 1 :*** Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$
On écrit la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, entre $0$ et $x$, pour la fonction $f(x) = e^x$.
Comme $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$, on a : $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, et :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt$$

Si $x \geq 0$, par positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt \geq 0$, d'où le résultat.
On peut remarquer qu'on aurait l'inégalité inverse pour $x < 0$.

***Exemple 2 :*** Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \ln(1+x) \leq x$

Si $f(x) = \ln(1+x)$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$.
La formule de Taylor à l'ordre 1 pour $f$ entre 0 et $x$ s'écrit :

$$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}\, dt$$

Si $x \geq 0$, pour tout $t$ de $[0,x]$, $x - t \geq 0$ d'où $\dfrac{x-t}{(1+t)^2} \geq 0$, et donc $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}\, dt \geq 0$.
Par conséquent $\ln(1+x) - x \leq 0$.

# 2 Inégalité de Taylor-Lagrange

***Rappel :***

***Théorème 2 :*** Si $a < b$, alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$

Dans ce paragraphe, on cherche à majorer le reste intégral de la formule de Taylor, et de montrer qu'il est négligeable devant tous les termes de la somme qui précède : ainsi la partie principale peut être considérée comme une approximation polynomiale de la fonction.

• Supposons que $a < b$, et que la fonction $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ contenant $a$ et $b$. Ainsi la fonction $|f^{(n+1)}|$ admet un majorant $M$ sur $[a,b]$ :

$$\forall t \in [a,b], \qquad |f^{(n+1)}| \leq M$$

d'où : $\forall t \in [a,b]$, $\qquad \dfrac{(b-t)^n}{n!}|f^{(n+1)}| \leq M\dfrac{(b-t)^n}{n!}$, et par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)\, dt| \leq M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, dt$$

On obtient donc : $|R_n| \leq M\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
c'est-à-dire :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On admettra le cas $a > b$ et alors :

***Théorème 3 :*** Si $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle contenant $a$ et $b$, et si $M$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$ ou $[b,a]$,
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

# 3 Formule de Taylor-Young

Ecrivons la formule de Taylor avec reste intégral avec $a = x_0$ et $b = x$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Si $M$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur un intervalle contenant $x_0$, pour tout $x$ de cet intervalle on a :

$$|R_n| \leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Posons : $\epsilon(x) = \dfrac{R_n}{(x-x_0)^n}$, alors $|\epsilon(x)| \leq \dfrac{M|x-x_0|}{(n+1)!}$, et donc $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$.

***Théorème 4 :*** Soit $f$ de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$, $x_0$ un réel de $I$. Alors il existe une fonction $\epsilon$ telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$ et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x)$$

***Remarques :***

1. Ce théorème est en fait valable dès que $f$ est de classe $C^n$ sur l'intervalle en question : on l'a démontré pour $f$ de classe $C^{n+1}$, et de fait on l'appliquera à des fonctions de classe $C^\infty$ !

2. Dire que $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$ signifie que le terme complémentaire $(x-x_0)^n\epsilon(x)$ est *négligeable* devant $(x-x_0)^n$ quand $x$ tend vers $x_0$.
   On peut donc écrire la formule de Taylor-Young sous la forme :
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \circ((x-x_0)^n)$$

3. Pour $n = 1$, la formule s'écrit : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\epsilon(x)$.
   On reconnait le développement limité d'ordre 1 de $f$ au voisinage de $x_0$.

# 4 Développements limités

## 4.1 Définition

***Définition 1 :*** On dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ si, et seulement si, il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $x_0$ et une fonction $\epsilon$ et un polynôme $P_n$ de degré inférieur ou égal à $n$ tels que :

$$\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0 \qquad et \qquad \forall x \in I \qquad f(x) = P_n(x-x_0) + (x-x_0)^n\epsilon(x)$$

***Exemple :*** Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
On sait que, si $x \neq 1$, on a : $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
donc si l'on pose : $\epsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$
et : $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\epsilon(x)$
donc la fonction $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0, et ceci pour tout entier naturel $n$, avec $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

***Théorème 5 :*** Toute fonction de classe $C^n$ sur un intervalle $I$ contenant $x_0$ admet un développement limité donné par la formule de Taylor-Young.

En effet, la partie principale de cette formule est un polynôme de degré $n$ en $x - x_0$.

***Remarque 1 :*** Au voisinage de $x_0$, $(x-x_0)^n\epsilon(x) = \circ((x-x_0)^n)$.
On utilisera de préférence cette deuxième écriture pour écrire les développements limités.

***Remarque 2 :*** Soit $x_0$ un réel quelconque, et $h = x - x_0$. Avec un changement de variable on peut alors écrire :

$$f(x) = f(x_0 + h) = P_n(h) + \circ(h^n)$$

Pour trouver un développement limité au voisinage d'un réel quelconque $x_0$, on peut donc toujours se ramener à un DL au voisinage de 0. Dans la pratique, on utilisera les développements limités usuels au voisinage de 0, et certaines opérations sur ces DL.

### 4.2 Développements limités usuels

Pour calculer ces DL, il suffit de calculer les dérivées successives des fonctions étudiées, et leurs valeurs en 0.

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \circ(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \circ(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \circ(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \circ(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \circ(x^n)}$$

En remplaçant $x$ par $-x$ dans cette formule, on retrouve le DL de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 0, établi au paragraphe précédent par une autre méthode.

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)}$$

*Par exemple :* Si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, on peut appliquer cette formule avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$
Le DL à l'ordre 3 de cette fonction au voisinage de 0 est donc :
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + \circ(x^3)$

## 5 Opérations sur les développements limités

### 5.1 Opérations sur les fonctions négligeables au voisinage de 0

***Définition 2 :*** $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de 0 si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
*Notation :* $f(x) \underset{0}{=} \circ(g(x))$
*Remarque :* Quand il n'y a pas d'ambiguité, et que tout se passe au voisinage de 0, on écrit simplement : $f(x) = \circ(g(x))$.

***Propriétés :***

1. $f(x) = \circ(1) \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

2. **Transitivité :** Si $f(x) = \circ(g(x))$, et $g(x) = \circ(h(x))$, alors $f(x) = \circ(h(x))$

3. **Linéarité :** si $f_1(x) = \circ(g(x))$ et $f_2(x) = \circ(g(x))$, alors pour tous réels $\lambda$ et $\mu$, $\quad \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \circ(g(x))$
   En particulier, la somme de deux fonctions négligeables devant $x^n$ est négligeable devant $x^n$. Ceci se traduit dans les calculs par : $\circ(x^n) + \circ(x^n) = \circ(x^n)$

4. Si $n > p$, $\quad x^n = \circ(x^p)$
   Combiné avec la propriété précédente cela donne : si $n > p$, $\quad \circ(x^n) + \circ(x^p) = \circ(x^p)$
   par exemple : $\circ(x^3) + \circ(x^2) = \circ(x^2)$

5. **Inverse :** $f(x) = \circ(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{g(x)} = \circ\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$
   *Exemple :* $\dfrac{1}{x^2} = \circ\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

6. **Produit :** si $f(x) = \circ(g(x))$, et si $h$ est une fonction non nulle au voisinage de 0, alors : $h(x)f(x) = \circ(h(x)g(x))$
   *Exemple :* $x^2 \circ (x^3) = \circ(x^5)$
   et plus généralement : $x^k \circ (x^n) = \circ(x^{n+k})$
   *Autre exemple :* $\dfrac{\circ(x^n)}{x^n} = \circ(1)$

## 5.2 Opérations sur les équivalents

***Définition 3 :*** $f(x) \underset{0}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Quand il n'y a pas d'ambiguité, que tout se passe au voisinage de 0, on écrit simplement : $f(x) \sim g(x)$
*Exemple :* $\ln(1+x) \sim x$

**Propriétés :**

1. $f(x) \sim g(x) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$
   La réciproque n'est vraie que lorsque la limite commune de $f$ et $g$ est finie et non nulle.

2. Si $f(x) = g(x) + \circ(g(x))$, alors $f(x) \sim g(x)$
   *dém :* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \dfrac{\circ(g(x))}{g(x)} = 1 + \circ(1)$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
   **Application :** Si $f$ admet une développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent au **premier terme non nul** de ce DL, les autres termes étant négligeables devant le premier.
   *Exemples :* $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \circ(u^2)$, d'où $\ln(1+u) \sim u$.
   $e^u - 1 \sim u$

3. Si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$, alors $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$
   *Exemple :* $(e^x - 1)\ln(1+x) \sim x^2$

## 5.3 Somme de deux développements limités

*Exemple :* Ecrire un DL à l'ordre 3 de : $e^x + \sqrt{1+x}$
Pour cela on écrit des DL des deux termes de cette somme, à l'ordre 3.
On a : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$
On additionne les parties principales membre à membre, et la somme de deux fonctions négligeables devant $x^3$ est une fonction négligeable devant $x^3$. On obtient :

$$e^x + \sqrt{1+x} = 2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + \circ(x^3)$$

*Remarque :* Si on additionne deux DL d'ordres différents, on obtient un DL de l'ordre le plus petit.

$$\begin{cases} f(x) = a + bx + cx^2 + \circ(x^2) \\ g(x) = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \circ(x^3) \end{cases}$$

Alors comme $d'x^3 + \circ(x^3) = \circ(x^2)$, on a : $f(x) + g(x) = (a+a') + (b+b')x + (c+c')x^2 + \circ(x^2)$

## 5.4 Produit de deux développements limités

*Exemple :* Ecrire un DL à l'ordre 2 de $e^x \ln(1+x)$
Ecrivons les DL respectifs des deux facteurs du produit, à l'ordre 2 :
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ et $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2))(x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2) + x^2 - \frac{x^3}{2} + x \circ (x^2) + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \circ (x^2) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2) \end{aligned}$$

En effet, à part les termes en $x$ et en $x^2$, tous les termes sont négligeables devant $x^2$, donc leur somme l'est aussi.

### 5.5 Composition de deux développements limités

***Exemple 1 :*** Ecrire un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de : $g(x) = \dfrac{1}{1+3x^2}$
Dans ce cas, on effectue simplement un changement de variable, en posant $u = 3x^2$ : en effet $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$.
Comme $\quad \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \circ(u^2) \quad$, on a :

$$\frac{1}{1+3x^2} = 1 - 3x^2 + 9x^4 + \circ(x^4)$$

On remarque qu'il suffit de prendre un DL d'ordre 2 de $\dfrac{1}{1+u}$ pour obtenir un DL d'ordre 4 de $g$ au voisinage de 0.

***Exemple 2 :*** Ecrire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\ln(1+x)}}$.
Posons $u = \ln(1+x)$, alors comme $\lim\limits_{x\to 0} u = 0$, donc on peut effectuer le changement de variable, mais pour avoir une partie principale qui soit un polynôme, il faut utiliser l'expression de $u$ sous forme de développement limité :

$u = x - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2) \qquad$ et $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 + \circ(u^2)$
donc $\qquad f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)) + \dfrac{3}{8}(x^2 + \circ(x^2)) + \circ(x^2) \qquad$, car $x^2 \sim u^2 \qquad$ d'où :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}x^2 + \circ(x^2)$$

## 6 Application au calcul de limites

***Exemple 1 :*** Calculer la limite en 0 de la fonction $f$ : $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
On sait que, dans un voisinage de 0, $\qquad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$
donc $\qquad f(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2} + \circ(x^2)}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \circ(1) \qquad$ d'où :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

***Exemple 2 :*** Calculer la limite en $+\infty$ de $\qquad f(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-1}$
On a : $\quad f(x) = x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$
Or : $\quad \sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{1}{2}t + \circ(t) \quad$ lorsque $t$ tend vers 0, et d'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$
On peut donc effectuer les deux changements de variable :
$\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1 + \dfrac{3}{2x^2} + \circ\left(\dfrac{3}{x^2}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{2x^2} + \circ\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{2}{x^2} + \circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
d'où $\quad f(x) = \dfrac{2}{x} + \circ\left(\dfrac{1}{x}\right) \qquad$ et $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

Un tel développement de la fonction, quand la variable tend vers l'infini, est appelé *développement asymptotique.*

***Exemple 3 :*** Soit $\begin{cases} f(x) = & \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} \qquad \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = & 0 \end{cases}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0 ainsi que la position de la courbe de $f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0.

On établit un développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de 0, à l'aide du développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$ d'où : $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)$

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc $f$ est bien continue en 0.

2. $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} + \circ(x)$ d'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{2}$
   $f$ est donc dérivable en 0, et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

3. L'équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0 est : $y = \dfrac{x}{2}$ et on a :
   $f(x) - \dfrac{x}{2} = -\dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)$
   donc au voisinage de 0, $f(x) - \dfrac{x}{2} < 0$ : La courbe est *en-dessous* de sa tangente au point (0,0).