ESPACES VECTORIELS

Il s'agit d'étudier les propriétés d'une famille d'ensembles qui possèdent la même structure. Dans tout le chapitre, K désignera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

I – Espaces vectoriels

1) Définitions

Définition : Une loi de composition interne dans un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E : $(u,v) \mapsto u+v$.

Exemples : Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$, addition et multiplication des fonctions définies sur un ensemble D, addition et multiplication des polynômes, addition des matrices…

Définition : Une loi de composition externe dans un ensemble E à opérateurs dans K est une application de $K \times E$ dans E : $(\alpha,u) \mapsto \alpha u$.

Exemples : Multiplication par un réel des fonctions définies sur un ensemble D, multiplication par un réel des polynômes, multiplication par un réel des matrices, …

Définition : Un ensemble E est un espace vectoriel sur K, ou un K-espace vectoriel, s'il est muni d'une loi de composition interne notée + et d'une loi de composition externe à opérateurs dans K notée . qui vérifient les propriétés :

1. $u+v=v+u$ pour tous les éléments u et v de E (commutativité).
2. $(u+v)+w=u+(v+w)$ pour tous les éléments u, v et w de E (associativité).
3. Il existe un élément (neutre) 0_E de E tel que pour tout élément u de E : $u+0_E=0_E+u=u$.
4. Pour tout élément u de E, il existe un unique élément u^* de E tel que : $u+u^*=u^*+u=0_E$.
5. $1u=u$ pour tout élément u de E.
6. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ pour tous les éléments u et v de E et tout réel α.
7. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$ pour tout élément u de E et tous réels α et β.
8. $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$ pour tout élément u de E et tous réels α et β (on le notera $\alpha\beta u$).

Les 4 premières propriétés donnent à $(E,+)$ une structure de groupe commutatif.

Remarque 1 : Un espace vectoriel n'est pas vide puisqu'il contient 0_E.

Remarque 2 : On peut démontrer que s'il y a un élément neutre, il est unique. Supposons qu'il y en ait deux notés 0_E et $0'_E$.

On a : $\forall u \in E \quad u+0_E=0_E+u=u$. Donc si $u=0'_E$: $0'_E+0_E=0_E+0'_E=0'_E$.

On a : $\forall u \in E \quad u+0'_E=0'_E+u=u$. Donc si $u=0_E$: $0_E+0'_E=0'_E+0_E=0_E$.

Donc : $0_E=0'_E$.

Or : $\forall u \in E \quad u+0u=1u+0u=(1+0)u=1u$ donc : $\forall u \in E \quad u+0u=u$

Conséquence : Par unicité : $\boxed{\forall u \in E \quad 0u=0_E}$

Remarque 3 : On peut démontrer que s'il y a un symétrique u^* de u, il est unique. Supposons qu'il y en ait deux notés u^* et u^{**}.

On a : $u+u^*=u^*+u=0_E$ et $u+u^{**}=u^{**}+u=0_E$.

Donc : $u^{**}+(u+u^*)=u^{**}+0_E=u^{**}$ et $u^*+(u+u^{**})=u^*+0_E=u^*$.

Or par associativité et commutativité : $u^{**}+(u+u^*)=u^*+(u^{**}+u)$.

Donc : $u^* = u^{**}$.

Or : $\forall u \in E \quad u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1-1)u = 0u = 0_E$

Conséquence : Par unicité : $\boxed{\forall u \in E \quad u^* = (-1)u}$ On notera $\forall u \in E \quad u^* = -u$.

Par analogie avec les vecteurs du plan, on parle d'espace « vectoriel », et les éléments de l'ensemble E s'appellent des « vecteurs » (même quand ce ne sont pas des « vrais » vecteurs !). Les opérateurs réels ou complexes sont appelés des « scalaires ».

Pour ne pas confondre les « vecteurs » et les « scalaires », en général les vecteurs sont notés u, v et w, et les scalaires avec des lettres grecques α, β et γ.

Pour distinguer le zéro des vecteurs et le zéro des réels, le vecteur nul est noté 0_E.

Propriété : Si E est un espace vectoriel sur K, alors, si $u \in E$ et $\alpha \in K$:

$$\alpha u = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } u = 0_E.$$

Démonstration : On démontre séparément les deux implications.

Montrons d'abord : $\alpha = 0$ ou $u = 0_E \Rightarrow \alpha u = 0_E$.

Si $\alpha = 0$: pour tout vecteur u, $u = 1u = (0+1)u = 0u + 1u = 0u + u$. Donc $0u = 0_E$.

Si $u = 0_E$: pour tout réel α, $\alpha u = \alpha(u + 0_E) = \alpha u + \alpha 0_E$. Donc $\alpha 0_E = 0_E$.

Montrons ensuite : $\alpha u = 0_E \Rightarrow \alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

Si $\alpha u = 0_E$, il y a deux cas possibles : $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha u = 0_E$ et $\alpha \neq 0$, on peut multiplier par $\dfrac{1}{\alpha}$: $1u = \dfrac{1}{\alpha} 0_E$, donc $u = 0_E$.

Donc en définitive, si $\alpha u = 0_E$, il y a deux cas possibles : $\alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

Remarque : Cette propriété ressemble à la propriété d'intégrité de $\mathbb{R}$: $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$, mais ici, les deux éléments ne sont pas de même nature.

2) Exemples fondamentaux

Exemple 1 : L'ensemble $E = K^n$ des n-listes $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ d'éléments de K est un espace vectoriel sur K lorsqu'il est muni des lois suivantes :

$$u + v = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha u = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

Démonstration : Elle est conséquence des propriétés de K.

1. $u + v = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.
   $v + u = (y_1, y_2, ..., y_n) + (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n)$.
   Or l'addition est commutative dans K.
   Donc : $u + v = v + u$ pour tous u et v de $E = K^n$.
2. $u + v = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.
   Donc $(u+v) + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)$.
   Donc $(u+v) + w = \big((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, ..., (x_n + y_n) + z_n\big)$.
   $v + w = (y_1, y_2, ..., y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n) = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, ..., y_n + z_n)$.
   Donc $u + (v + w) = (x_1, x_2, ..., z_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, ..., y_n + z_n)$.
   Donc $u + (v + w) = \big(x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), ..., x_n + (y_n + z_n)\big)$.
   Or l'addition est associative dans K.
   Donc $(u+v) + w = u + (v + w)$ pour tous u, v et w de $E = K^n$.
3. L'élément neutre de l'addition est $0_E = (0,0,...,0)$. En effet :
   $u + 0_E = (x_1, x_2, ..., x_n) + (0,0,...,0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, ..., x_n + 0) = (x_1, x_2, ..., x_n)$
   Donc : $u + 0_E = u$ pour tout u. L'égalité $0_E + u = u$ est due au 1).

4. Tout $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $E = K^n$ a pour opposé $u^* = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ car :
$(x_1, x_2, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., -x_n) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, ..., x_n - x_n) = (0,0,...,0)$.
5. $1u = 1(x_1, x_2, ..., x_n) = (1x_1, 1x_2, ..., 1x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = u$ pour tout u de $E = K^n$.
6. $\alpha(u+v) = \alpha[(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)] = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.
Donc : $\alpha(u+v) = (\alpha[x_1 + y_1], \alpha[x_2 + y_2], ..., \alpha[x_n + y_n])$.
Donc : $\alpha(u+v) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, ..., \alpha x_n + \alpha y_n)$.
Donc : $\alpha(u+v) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, ..., \alpha y_n)$.
Donc : $\alpha(u+v) = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) + \alpha(y_1, y_2, ..., y_n)$.
Donc : $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ pour tous u et v de $E = K^n$ et tout $\alpha \in K$.
7. $(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, x_2, ..., x_n) = ([\alpha + \beta]x_1, [\alpha + \beta]x_2, ..., [\alpha + \beta]x_n)$
Donc : $(\alpha + \beta)u = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, ..., \alpha x_n + \beta x_n)$
Donc : $(\alpha + \beta)u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n)$
Donc : $(\alpha + \beta)u = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta(x_1, x_2, ..., x_n)$
Donc : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ pour tout u de $E = K^n$ .et tous α et β de K.
8. $\alpha(\beta u) = \alpha[\beta(x_1, x_2, ..., x_n)] = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, ..., \alpha\beta x_n)$
Donc : $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha\beta)u$ pour tout u de $E = K^n$ et tous α et β de K.

La démonstration est valable pour toutes les valeurs de l'entier $n \geq 1$.

En particulier : $E = \mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (les réels jouent deux rôles).
$E = \mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (les complexes jouent deux rôles).
$E = \mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il suffit de restreindre les opérateurs.

Exemple 2 : L'ensemble $E = \mathscr{A}(D,K)$, noté aussi K^D, des applications définies sur un ensemble non vide D et à valeurs dans K est un espace vectoriel sur K lorsqu'il est muni des lois suivantes :
- l'addition des applications : $x \xrightarrow{f+g} f(x) + g(x)$.
- la multiplication des applications par un élément de K : $x \xrightarrow{\alpha f} \alpha f(x)$.

Démonstration : Les propriétés sur les applications f se démontrent à l'aide des propriétés des éléments $f(x)$ de K car : $f = g \Leftrightarrow \forall x \in D \quad f(x) = g(x)$.

1. Dans K : $\forall x \in D \quad f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ (commutativité).
Donc $f + g = g + f$ pour tous les éléments f et g de $E = \mathscr{A}(D,K)$.
2. Dans K : $\forall x \in D \quad [f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$ (associativité).
Donc $(f + g) + h = f + (g + h)$ pour tous les éléments f, g et h de $E = \mathscr{A}(D,K)$.
3. L'élément neutre 0_E de $E = \mathscr{A}(D,K)$ est la fonction nulle sur D car dans K :
$\forall x \in D \quad f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$.
4. Toute fonction f de $E = \mathscr{A}(D,K)$ possède une fonction opposée : c'est la fonction notée $(-f)$ qui à tout $x \in D$ associe $-f(x)$.
5. $1f = f$ pour toute fonction f de $E = \mathscr{A}(D,K)$.
6. Dans K : $\forall x \in D \quad \alpha[f(x) + g(x)] = \alpha f(x) + \alpha g(x)$ (distributivité).
Donc $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ pour toutes fonctions f et g de $E = \mathscr{A}(D,K)$ et tout $\alpha \in K$.
7. Dans K : $\forall x \in D \quad (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$ (distributivité).
$(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ pour toute fonction f de $E = \mathscr{A}(D,K)$ et tous α et β de K.
8. Dans K : $\forall x \in D \quad \alpha[\beta f(x)] = (\alpha\beta)f(x)$ (associativité).

$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$ pour toute fonction *f* de $E = \mathscr{F}(D, K)$ et tous réels α et β.

En particulier, l'ensemble des suites numériques $\mathscr{F}(\mathbb{N}, K) = K^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur *K*.

Il y a bien sûr d'autres exemples à connaître. Mais on les obtiendra dans d'autres paragraphes.

Exemple 3 : L'ensemble $E = \mathscr{M}_{n,p}(K)$ des matrices à coefficients dans *K* est un espace vectoriel sur *K* lorsqu'il est muni des lois suivantes :
- l'addition des matrices : $A + B = (a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})$.
- la multiplication des matrices par un élément de *K* : $\alpha A = \alpha(a_{i,j}) = (\alpha a_{i,j})$.

Les propriétés ont déjà été démontrées.

II – Sous-espaces vectoriels

1) Définition

D'autres exemples importants d'espaces vectoriels existent, comme par exemple les polynômes. Mais l'ensemble $K[X]$ des polynômes est contenu dans $\mathscr{F}(K, K)$. On va voir que certaines propriétés n'ont pas besoin d'être redémontrées.

Définition : Une partie non vide *F* d'un espace vectoriel *E* est un sous-espace vectoriel de *E* si la restriction des lois de *E* munit *F* d'une structure d'espace vectoriel.

Il faut tout d'abord que l'addition soit une loi de composition interne pour *F* et que la multiplication par un réel soit une loi de composition externe pour *F* :

$$\forall (u,v) \in F^2 \quad u + v \in F \qquad \text{et} \qquad \forall u \in F \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha u \in F$$

D'autre part, on sait que *E* a une structure d'espace vectoriel. Donc les 8 propriétés sont vérifiées. Or toutes les propriétés qui sont vérifiées pour tous les vecteurs de *E* le sont aussi pour tous les vecteurs de *F* puisque $F \subset E$. Donc les propriétés 1, 2, 5, 6, 7 et 8 sont vérifiées par *F*. Il reste donc les propriétés 3 et 4.

Or $F \neq \emptyset$, donc il existe au moins un élément $u \in F$. Donc $0u \in F$. Donc $0_E \in F$.

Or d'après la propriété 3 de *E* : $\forall u \in F \quad u + 0_E = 0_E + u = u$. Donc : $0_F = 0_E$.

On a vu que : $\forall u \in E \quad u^* = (-1)u$. Or $\forall u \in F \quad (-1)u \in F$, donc $u^* \in F$ et d'après la propriété 4 de *E* : $\forall u \in F \quad u + u^* = u^* + u = 0_E = 0_F$.

Théorème : Une partie *F* d'un espace vectoriel *E* est un sous espace vectoriel si et seulement si il vérifie les 3 propriétés suivantes :
1. $F \neq \emptyset$ (ce qui revient à démontrer que $0_E \in F$).
2. $\forall (u,v) \in F^2 \quad u + v \in F$.
3. $\forall u \in F \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha u \in F$.

On peut remarquer que l'on peut condenser les deux dernières propriétés :

Théorème : Une partie *F* d'un espace vectoriel *E* est un sous espace vectoriel si et seulement si : $F \neq \emptyset$ et $\forall \alpha \in K \quad \forall (u,v) \in F^2 \quad \alpha u + v \in F$.

En effet, si le premier théorème est vrai, tout vecteur de la forme $\alpha u + v$ appartient à *F*, et réciproquement si le dernier théorème est vrai, avec $\alpha = 1$ on retrouve la propriété 2, et avec $\beta = 0$ la propriété 3.

On prendra donc comme critère indifféremment l'un des deux théorèmes. Mais il faudra retenir deux choses :

- Tout sous-espace vectoriel de *E* est un espace vectoriel.
- Tout sous espace vectoriel de *E* contient le vecteur nul 0_E.

Donc le plus souvent pour démontrer que $F \neq \emptyset$, on montre que $0_E \in F$.

Exemple 1 : Montrer que $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 3x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
$F \neq \varnothing$ car $0 = (0,0)$ vérifie $0 = 3 \times 0$, donc appartient à *F*.
Soient $u = (x,y)$ et $v = (x',y')$ deux vecteurs de *F*. Donc $y = 3x$ et $y' = 3x'$.
$\alpha u + v = (\alpha x + x', \alpha y + y') = (X,Y)$ et $Y = \alpha y + y' = \alpha(3x) + (3x') = 3(\alpha x + x') = 3X$.
Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall (u,v) \in F^2\quad \alpha u + v \in F$.
Donc *F* est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Exemple 2 : Montrer que l'ensemble *F* est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.
$F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \,/\, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = a + b\sqrt{x}\}$.
$F \neq \varnothing$ car la fonction nulle appartient à *F* ($a = b = 0$).
Soient *f* et *g* deux fonctions de *F* : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = a + b\sqrt{x}$ et $g(x) = a' + b'\sqrt{x}$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \ \alpha f(x) + g(x) = \alpha(a + b\sqrt{x}) + (a' + b'\sqrt{x})$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \ \alpha f(x) + g(x) = (\alpha a + a') + (\alpha b + b')\sqrt{x} = A + B\sqrt{x}$.
Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall (f,g) \in F^2\quad \alpha f + g \in F$.
Donc *F* est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

2) Autres exemples fondamentaux

Exemple 4 : $K[X]$ ensemble de tous les polynômes à coefficients réels ou complexes.

Théorème : L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans *K* est un espace vectoriel sur *K* lorsqu'il est muni de l'addition des polynômes et de la multiplication des polynômes par un élément de *K*.

Démonstration : On montre que l'ensemble des polynômes $K[X]$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(K,K)$.

- $K[X]$ est une partie non vide de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(K,K)$ (polynôme nul).
- $K[X]$ est stable par addition : la somme de deux polynômes est un polynôme.
- $K[X]$ est stable par multiplication par un élément de *K* : si *P* est un polynôme, αP est aussi un polynôme.

Exemple 5 : $K_n[X]$ ensemble de tous les polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à *n*.

Théorème : L'ensemble $K_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à *n* et à coefficients dans *K* est un espace vectoriel sur *K* lorsqu'il est muni de l'addition des polynômes et de la multiplication des polynômes par un élément de *K*.

Démonstration : On montre que l'ensemble des polynômes $K_n[X]$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $K[X]$.

- $K_n[X]$ est une partie non vide de l'espace vectoriel $K[X]$ (polynôme nul).
- $K_n[X]$ est stable par addition : $\mathrm{d}°(P+Q) \leq \mathrm{Max}(\mathrm{d}°P, \mathrm{d}°Q) \leq n$.
- $K_n[X]$ est stable par multiplication par un élément de *K* : $\mathrm{d}°(\alpha P) = \mathrm{d}°P$ si $\alpha \neq 0$ et $\mathrm{d}°(\alpha P) = -\infty$ si $\alpha = 0$. Donc dans tous les cas $\mathrm{d}°(\alpha P) \leq n$.

3) Propriétés des sous-espaces vectoriels

Soit *E* un espace vectoriel.

Théorème : Tout sous-espace vectoriel de *E* contient le vecteur nul 0_E.

Et $F = \{0_E\}$ vérifie la définition d'un sous espace.
Un sous-espace peut ou non contenir d'autres vecteurs, voire même tous les vecteurs.

Tout espace vectoriel E possède au moins deux sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E (éventuellement confondus).

<u>Théorème</u> : Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un sous espace vectoriel.

<u>Démonstration</u> : Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous espaces vectoriels de E et $F=\bigcap_{i\in I} F_i$. Montrons que F est un sous-espace de E.

- Tout d'abord, 0_E appartient à tous les F_i puisque ce sont des sous espaces. Donc 0_E appartient à F. Donc F n'est pas vide.
- Soit $\alpha\in K$ et $(u,v)\in F^2$. Donc le vecteur u appartient à $F=\bigcap_{i\in I} F_i$. Donc $\forall i\in I \quad u\in F_i$. De même $\forall i\in I \quad v\in F_i$. Or pour tout $i\in I$, F_i est un sous-espace de E. Donc $\forall i\in I \quad \alpha u+v\in F_i$. Donc $\alpha u+v\in F$.

Donc $F=\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

<u>Conséquence</u> : L'intersection de deux ou plusieurs sous-espaces vectoriels n'est jamais vide. La plus petite intersection est $\{0_E\}$.

<u>*Exemple*</u> : On peut remarquer que quels que soient les réels a, b et c, l'ensemble $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / ax+by+cz=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Donc l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires <u>homogènes</u> $\begin{cases}3x-2y+4z=0\\ x+2y+3z=0\end{cases}$, par exemple, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Par contre, la réunion de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

On peut penser à la réunion de deux droites vectorielles distinctes : la somme d'un vecteur de l'une et d'un vecteur de l'autre n'appartient ni à l'une ni à l'autre.

On définit donc le plus petit sous-espace vectoriel F contenant F_1 et F_2. Il doit contenir au moins toutes les sommes d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2. On montre que cela suffit : on obtient ainsi un sous-espace vectoriel.

<u>Théorème</u> : Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, l'ensemble $F=\{u_1+u_2 / u_1\in F_1 \text{ et } u_2\in F_2\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme des deux sous-espaces F_1 et F_2 et est noté $F=F_1+F_2$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F_1 et F_2.

<u>Démonstration</u> :

- Tout d'abord, 0_E appartient à F_1 et à F_2 puisque ce sont des sous espaces. Donc $0_E=0_E+0_E$ appartient à F. Donc F n'est pas vide.
- Soit $\alpha\in K$ et $(u,v)\in F^2$. Le vecteur u appartient à $F=F_1+F_2$. Donc il existe $u_1\in F_1$ et $u_2\in F_2$ tels que $u=u_1+u_2$. De même il existe $v_1\in F_1$ et $v_2\in F_2$ tels que $v=v_1+v_2$.
  Donc $\alpha u+v=\alpha(u_1+u_2)+(v_1+v_2)=(\alpha u_1+v_1)+(\alpha u_2+v_2)$.
  Or F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels.
  Donc $\alpha u_1+v_1\in F_1$ et $\alpha u_2+v_2\in F_2$. Donc $\alpha u+v\in F$.

Donc $F=F_1+F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

On peut remarquer que tout vecteur u de $F = F_1 + F_2$ s'écrit $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$, mais que cette écriture n'est pas toujours unique : si $v \in F_1 \cap F_2$, le vecteur u s'écrit aussi $u = (u_1 + v) + (u_2 - v)$ avec $(u_1 + v) \in F_1$ et $(u_2 - v) \in F_2$.
Donc pour avoir une décomposition unique, il faut que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

<u>Définition</u> : La somme des deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E est directe si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Elle est alors notée : $F = F_1 \oplus F_2$.

C'est le cas par exemple de deux droites vectorielles distinctes.

<u>Théorème</u> : Si la somme des deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 est directe, tout vecteur de $F = F_1 \oplus F_2$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 : $\forall u \in F \quad \exists!(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \quad u = u_1 + u_2$.
En particulier : $u_1 + u_2 = 0_E \Leftrightarrow u_1 = 0_E$ et $u_2 = 0_E$.

<u>Démonstration</u> : On commence par démontrer le cas particulier.
Il est évident que si $u_1 = 0_E$ et $u_2 = 0_E$, alors $u_1 + u_2 = 0_E$.
Réciproquement, si $u_1 + u_2 = 0_E$, alors $u_2 = -u_1 = (-1)u_1$. Donc $u_2 \in F_1$.
Or $u_2 \in F_2$. Donc $u_2 \in F_1 \cap F_2$. Donc $u_2 = 0_E$, et donc $u_1 = 0_E$.
Ensuite, pour démontrer l'unicité de la décomposition, on suppose qu'un vecteur u possède deux décompositions : $u = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$ avec $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ et $(u'_1, u'_2) \in F_1 \times F_2$. On a donc : $(u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) = 0_E$ avec $u_1 - u'_1 \in F_1$ et $u_2 - u'_2 \in F_2$ car F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels. Donc d'après ce qui précède $u_1 - u'_1 = 0_E$ et $u_2 - u'_2 = 0_E$. Donc $u_1 = u'_1$ et $u_2 = u'_2$.

<u>Définition</u> : Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont supplémentaires si leur somme est directe et égale à E : $E = F_1 \oplus F_2$.

D'après ce qui précède, alors tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2
C'est le cas par exemple de deux droites vectorielles distinctes du plan : tout vecteur du plan est somme unique d'un vecteur de chacune des droites.
Mais on peut sur cet exemple voir qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire.

<u>Théorème</u> : La somme $F_1 + \ldots + F_n = \{u_1 + \ldots + u_n / u_1 \in F_1, \ldots, u_n \in F_n\}$ de n sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Ce théorème se démontre par récurrence.
On dira que cette somme est directe si tout vecteur u de la somme $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ se décompose de manière unique en $u = u_1 + \ldots + u_n$ avec $u_i \in F_i$ pour tout i.
Mais la caractérisation de la somme directe $F = F_1 \oplus F_2$ par $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ ne se généralise pas à n sous-espaces vectoriels.

III – Familles de vecteurs

L'enjeu est d'essayer d'exprimer tous les vecteurs d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel en fonction d'un petit nombre de vecteurs.

1) Combinaisons linéaires

<u>Définition</u> : Un vecteur u d'un espace vectoriel E est combinaison linéaire de n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E s'il existe des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de K tels que :

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

<u>Exemple</u> : Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
P est combinaison linéaire des polynômes : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$.

Mais on peut remarquer que l'on a aussi : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 2x^2 + (x+1)^2$.

Donc P est aussi combinaison linéaire des polynômes : $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (x+1)^2$.

On a ainsi une infinité de décompositions.

<u>Théorème</u> : Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n vecteurs d'un espace vectoriel E, l'ensemble des combinaisons linéaires de ces n vecteurs est un sous espace vectoriel de E appelé sous-espace engendré par ces n vecteurs. On le note :

$$\text{Vect} < u_1,\ldots,u_n > = \{u \in E \,/\, \exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n\}.$$

<u>Démonstration</u> : On commence par examiner le cas d'un vecteur u. D'après la définition : $\text{Vect} < u > = \{v \in E \,/\, \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad v = \alpha u\}$.

Si $u = 0_E$, alors : $\text{Vect} < u > = \{0_E\}$ qui est un sous-espace vectoriel.

Si $u \neq 0_E$, alors, d'une part $0_E \in \text{Vect} < u >$ (en prenant $\alpha = 0$) et pour tous les vecteurs $v = \alpha u$ et $v' = \alpha' u$ et tous les réels λ et μ, on a $\lambda v + \mu v' = (\lambda\alpha + \mu\alpha')u$, qui appartient à $\text{Vect} < u >$. Donc $\text{Vect} < u >$ est un sous-espace vectoriel de E.

<u>Définition</u> : Si $u \neq 0_E$, le sous-espace $\text{Vect} < u > = \{v \in E \,/\, \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad v = \alpha u\}$ est appelée droite vectorielle engendrée par le vecteur u.

Dans le cas général : $\text{Vect} < u_1,\ldots,u_n > = \text{Vect} < u_1 > + \ldots + \text{Vect} < u_n >$.

C'est un sous-espace vectoriel de E comme somme de sous-espaces vectoriels de E.

2) Familles génératrices

<u>Définition</u> : Une famille $u_1, \ldots, u_n$ de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F est une famille génératrice de F si $\text{Vect} < u_1,\ldots,u_n > = F$, c'est-à-dire si tout vecteur de F est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

Le sous-espace vectoriel F considéré peut éventuellement être E.

<u>*Exemple*</u> : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 3y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Tout vecteur de F s'écrit : $u = (x,y,z) = (x,y,2x+3y) = x(1,0,2) + y(0,1,3)$.

Les vecteurs $u_1 = (1,0,2)$ et $u_2 = (0,1,3)$ appartiennent à F et tout vecteur de F est combinaison linéaire de u_1 et u_2. Donc les vecteurs $u_1 = (1,0,2)$ et $u_2 = (0,1,3)$ forment une famille génératrice de F.

On peut remarquer qu'il n'y a pas unicité. Par exemple, l'équation $2x + 3y - z = 0$ s'écrit aussi $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$ ou $x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z$. Donc les vecteurs de F s'écrivent aussi : $u = x\left(1, -\frac{2}{3}, 0\right) + z\left(0, \frac{1}{3}, 1\right)$ ou $u = y\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) + z\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Donc $u_3 = \left(1, -\frac{2}{3}, 0\right)$ et $u_4 = \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)$ d'une part, $u_5 = \left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right)$ et $u_6 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ d'autre part, forment deux autres familles génératrices de F.

<u>Propriétés</u> : Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

1) Toute famille de vecteurs de F contenant une famille génératrice de F est elle-même une famille génératrice de F.
2) Si tous les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ d'une famille génératrice de F sont combinaisons linéaires de k vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ de F, alors les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ forment une famille génératrice de F.

<u>Démonstration</u> : La première est évidente. En effet, si l'on rajoute des vecteurs à la famille génératrice, il suffit de leur attribuer des coefficients nuls.

Pour la deuxième, supposons que : $\forall i \in \{1,...,n\} \quad u_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j} v_j$. Alors tout vecteur u de F s'écrit : $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j} v_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{i,j} \right) v_j$.

Toute combinaison linéaire de combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_k$ est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_k$.

En particulier, si $u_1, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de F et si u_n est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{n-1}$, alors $u_1, \ldots, u_{n-1}$ est une famille génératrice de F.

On a donc intérêt à minimiser les familles génératrices en éliminant les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres : on est donc amené à étudier la dépendance linéaire des familles de vecteurs.

3) <u>Familles libres ou liées</u>

Dans le cas précédent, il y a existence de coefficients, mais pas toujours unicité.

<u>Exemple</u> : $u_1 = (1,0)$, $u_2 = (0,1)$ et $u_3 = (1,1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Tout vecteur u s'écrit : $u = (x,y) = xu_1 + yu_2 = \frac{x-y}{2}u_1 + \frac{y-x}{2}u_2 + \frac{x+y}{2}u_3$ et de bien d'autres façons encore.

Le problème est donc celui de l'unicité des coefficients.

En particulier, il faut tout d'abord que l'unicité soit vraie pour le vecteur nul. Comme on sait que $0u_1 + ... + 0u_n = 0_E$, il faut que ce soit l'unique décomposition.

<u>Définition</u> : Une famille $u_1, \ldots, u_n$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est une famille libre de E si toute combinaison linéaire nulle de $u_1, \ldots, u_n$ a tous ses coefficients α_1, …, α_n nuls : $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0_E \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

On dit aussi que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants.

<u>Exemple</u> : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs $u_1 = (1,-1,2)$ et $u_2 = (2,1,3)$.

Pour étudier la dépendance linéaire de ces deux vecteurs, on résout $\alpha u_1 + .\beta u_2 = 0_E$.

$\alpha u_1 + .\beta u_2 = 0_E$ équivaut à $(\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta, 2\alpha + 3\beta) = (0,0,0)$, donc à : $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$.

On obtient un système qui admet au moins la solution $(0,0,0)$. Le problème est d'examiner s'il en admet d'autres. Ici, le système équivaut à : $\begin{cases} 3\alpha = 0 \\ \alpha = \beta \\ 5\alpha = 0 \end{cases}$, donc n'a pour solution que $\alpha = \beta = 0$. Donc $u_1 = (1,-1,2)$ et $u_2 = (2,1,3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

<u>Propriétés des familles libres</u> :

1) Toute famille de vecteurs de E contenue dans une famille libre de E est elle-même une famille libre de E.
2) Les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ forment une famille libre de E si et seulement si tout vecteur de $\mathrm{Vect} < u_1,...,u_n >$ s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ avec des coefficients uniques.

Démonstration : La première est évidente car toute combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k$ est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ (avec des coefficients nuls pour $u_{k+1}, \dots, u_n$). Si $u_1, \dots, u_n$ est libre, tous les coefficients sont nuls, en particulier ceux de $u_1, \dots, u_k$.

La deuxième se démontre en deux parties.

Dans le sens direct, on connaît l'existence de la décomposition, donc le problème est l'unicité. Elle se démontre par l'absurde : on suppose qu'un vecteur de $\text{Vect} < u_1,...,u_n >$ ait deux décompositions : $u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + ... + \beta_n u_n$.

Donc $(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0_E$. Donc, puisque la famille est libre, tous les coefficients sont nuls. Donc $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Il y a unicité.

La réciproque est évidente. Puisqu'il y a unicité, pour le vecteur nul, il n'y a que la décomposition avec les coefficients nuls.

Définition : Une famille $u_1, \dots, u_n$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est une famille liée de E si ce n'est pas une famille libre, donc s'il existe des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0_E$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs $u_1 = (1,-1,2)$, $u_2 = (2,1,3)$ et $u_3 = (1,5,0)$. Pour étudier la dépendance linéaire de ces trois vecteurs, on résout $\alpha u_1 + .\beta u_2 + \gamma u_3 = 0_E$ qui équivaut à $(\alpha + 2\beta + \gamma, -\alpha + \beta + 5\gamma, 2\alpha + 3\beta) = (0,0,0)$.

On obtient le système : $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$ qui admet au moins la solution $(0,0,0)$. Le problème est d'examiner s'il en admet d'autres.

Il équivaut à : $\begin{cases} \gamma = -\alpha - 2\beta \\ -6\alpha - 9\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$, donc à $\begin{cases} \gamma = -\alpha - 2\beta \\ -3(2\alpha + 3\beta) = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$, donc à $\begin{cases} \beta = -\dfrac{2}{3}\alpha \\ \gamma = \dfrac{1}{3}\alpha \end{cases}$.

Ce système admet des solutions non nulles comme par exemple $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$.

Donc il existe au moins une combinaison linéaire nulle avec des coefficients non tous nuls, par exemple : $3u_1 - 2u_2 + u_3 = 0_E$.

Donc la famille $u_1 = (1,-1,2)$, $u_2 = (2,1,3)$ et $u_3 = (1,5,0)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Propriétés des familles liées :

1) Une famille de vecteurs de E est une famille liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
2) Toute famille de vecteurs de E contenant une famille liée de E est elle-même une famille liée de E.
3) Toute famille de vecteurs de E contenant 0_E est liée.
4) Une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ils sont colinéaires.

Démonstration : La première est évidente car la famille est liée si et seulement si l'un des coefficients de la combinaison linéaire nulle est non nul. Donc en divisant par ce coefficient, on exprime un des vecteurs en fonction des autres.

Dans l'exemple : $u_3 = -3u_1 + 2u_2$, $u_2 = \dfrac{3}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_3$ et $u_1 = \dfrac{2}{3}u_2 - \dfrac{1}{3}u_3$.

Parfois, c'est le cas de plusieurs vecteurs (pas ici).
La deuxième est évidente avec le premier critère, puisqu'un des vecteurs de la petite famille est combinaison linéaire des autres, donc des vecteurs de la grande famille.

Cas particuliers :
Une famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
Une famille (u,v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

La première découle de : $\alpha u = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

La deuxième découle de : $\alpha u + \beta v = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ u = -\dfrac{\beta}{\alpha} v \end{cases}$ ou $\begin{cases} \beta \neq 0 \\ v = -\dfrac{\alpha}{\beta} u \end{cases}$ ou $\alpha = \beta = 0$.

4) Bases d'un espace vectoriel

Définition : Une famille u_1, …, u_n de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F (éventuellement E) est une base de F si elle est à la fois libre et génératrice de F.

Le sous-espace vectoriel F considéré peut éventuellement être E.

Exemple : La famille $u_1 = (1,-1)$, $u_2 = (2,1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ car $\alpha u_1 + .\beta u_2 = 0_E$ équivaut à $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$, donc à $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$.

De plus, c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ car tout vecteur $u = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2 :

$u = \alpha u_1 + .\beta u_2$ équivaut à $\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -\alpha + \beta = y \end{cases}$, donc à $\begin{cases} 3\alpha + 2y = x \\ \beta = \alpha + y \end{cases}$, donc à $\begin{cases} \alpha = \dfrac{x - 2y}{3} \\ \beta = \dfrac{x + y}{3} \end{cases}$.

Donc la famille $u_1 = (1,-1)$, $u_2 = (2,1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème : Les vecteurs u_1, …, u_n forment une base de F si et seulement si tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de u_1, …, u_n avec des coefficients uniques : $\forall u \in F \quad \exists!(\alpha_1,...,\alpha_n) \in K^n \quad u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$.

C'est évident, étant données les propriétés des familles libres et génératrices.

Définition : Les scalaires α_1, …, α_n s'appellent les coordonnées du vecteur u dans la base $(u_1,...,u_n)$.

On vérifie facilement que si u et v ont pour coordonnées $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ et $(\beta_1,...,\beta_n)$ dans la base $(u_1,...,u_n)$, alors le vecteur $\lambda u + \mu v$ a pour coordonnées $(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1,...,\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$ dans cette base.

Bien sûr, un espace vectoriel peut posséder plusieurs bases. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ est aussi une base.

IV – Espaces vectoriels de dimension finie

1) Définition

L'espace vectoriel $K_3[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, donc tels qu'il existe $(a,b,c,d) \in K$ tels que $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Donc il admet comme famille génératrice $(1, X, X^2, X^3)$ où X^k est : $x \mapsto x^k$.
De manière évidente, c'est la même chose pour $K_n[X]$ quelque soit n.

Mais dans $K[X]$, toute famille génératrice doit engendrer au moins $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui n'est pas possible avec une famille finie. Pourtant tous les polynômes sont visiblement combinaison linéaire de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On étend donc la définition.

Définition : Une famille $(u_k)_{k\in I}$ est génératrice d'un espace vectoriel *E* si tout vecteur *u* de *E* est combinaison linéaire des vecteurs $(u_k)_{k\in I}$, ce qui signifie que $u=\sum_{k\in I}\alpha_k u_k$ où $(\alpha_k)_{k\in I}$ est une famille de scalaires à support fini : $\{k\in I/\alpha_k\neq 0\}$ est fini.

Certains ensembles ne possèdent pas du tout de famille génératrice : $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Définition : Un espace vectoriel *E* est « de-dimension-finie » s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples : $K_n[X]$ est un espace vectoriel « de-dimension-finie » mais pas $K[X]$.

L'espace $E=\{0_E\}$ est « de-dimension-finie » car $\{0_E\}$ est génératrice.

Remarque : On montrera plus tard que tout sous-espace vectoriel d'un espace « de-dimension-finie » est « de-dimension-finie ».

Remarque : Un espace vectoriel « de-dimension-finie » possède une infinité de familles génératrices finies car il suffit de rajouter un nombre fini de vecteurs. C'est donc impossible de les comparer. On va comparer les bases.

Théorème d'existence de base : Tout espace vectoriel *E* non réduit à $\{0_E\}$ et « de-dimension-finie » possède une base.

Démonstration : On considère un espace vectoriel $E\neq\{0_E\}$ et « de dimension finie », donc de famille génératrice $G=(u_1,...,u_n)$. Puisque $E\neq\{0_E\}$, il existe au moins un des vecteurs qui est non nul, donc il y a au moins une famille libre *L* contenue dans *G*.
Notons $\mathscr{L}$ l'ensemble de toutes les familles libres contenues dans *G*. Donc l'ensemble $\{\mathrm{Card}\,L/L\in\mathscr{L}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée par *n*. Elle possède donc un plus grand élément *k*.
Il existe donc une famille libre *L* contenue dans *G* et de cardinal *k*. En changeant éventuellement l'ordre des vecteurs, on peut dire que $L=(u_1,...,u_k)$.

Si $k=n$, alors *L* est libre et génératrice, donc c'est une base.

Si $k<n$, comme *L* est la plus grande famille libre, les familles $(u_1,...,u_k,u_j)$ avec $j>k$ sont liées. Donc il existe des scalaires $(\alpha_1,...,\alpha_k,\alpha_j)$ non tous nuls tels que $\alpha_1u_1+...+\alpha_ku_k+\alpha_ju_j=0_E$.

Si on avait $\alpha_j=0$, alors $\alpha_1u_1+...+\alpha_ku_k=0_E$, donc $\alpha_1=...=\alpha_k=0$ puisque *L* est libre, ce qui n'est pas possible puisque les scalaires sont non tous nuls.

Donc $\alpha_j\neq 0$ et donc $u_j=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_j}u_1-...-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_j}u_k$.

Donc les vecteurs u_{k+1}, …, u_n sont tous combinaisons linéaires de u_1, …, u_k.

Or tout vecteur de *E* est combinaison de u_1, …, u_n, donc de u_1, …, u_k.

Donc *L* est libre et génératrice, donc c'est une base.

Théorème : Si un espace vectoriel *E* possède une base de *n* vecteurs $(n\geq 1)$, alors toute famille de $(n+1)$ vecteurs est liée.

Démonstration : On raisonne par récurrence forte.

Initialisation : On suppose que *E* possède une base de 1 vecteur : $B=(e)$ et on considère une famille de 2 vecteurs (u_1,u_2). Donc $u_1=\alpha e$ et $u_2=\beta e$.

Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, la famille est liée car elle contient 0_E. Sinon, $\beta u_2 - \alpha u_1 = 0_E$ avec α et β non nuls, donc la famille est liée.

Hérédité : On suppose la propriété vraie jusqu'à $(n-1)$.

On suppose que E possède une base $B = (e_1,...,e_n)$ et on considère une famille de $(n+1)$ vecteurs de E : $(u_1,...,u_{n+1})$. Par définition de la base, il existe des scalaires $(\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le n+1\\ 1\le j\le n}}$ uniques tels que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!] \quad u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} e_j$.

Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!] \quad \alpha_{i,n} = 0$, alors $u_1, \ldots, u_n$ sont combinaisons linéaires de $(e_1,...,e_{n-1})$.

Dans l'espace $F = \text{Vect} < e_1,...,e_{n-1} >$, la famille $(e_1,...,e_{n-1})$ est génératrice et libre (extraite d'une famille libre), donc c'est une base de $(n-1)$ vecteurs. Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence, la famille $(u_1,...,u_n)$ est liée ainsi que la famille $(u_1,...,u_{n+1})$ qui la contient.

Sinon, $\exists i \in [\![1, n+1]\!] \quad \alpha_{i,n} \neq 0$. En changeant éventuellement l'ordre des vecteurs, on peut supposer $\alpha_{n+1,n} \neq 0$. On pose : $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad v_i = u_i - \dfrac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}} u_{n+1}$.

Donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad v_i = u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} e_j - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n+1,j} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}} \alpha_{n+1,j} \right) e_j .$$

Le coefficient de e_n est nul. Donc par un raisonnement analogue au cas précédent dans $F = \text{Vect} < e_1,...,e_{n-1} >$, la famille $(v_1,...,v_n)$ est liée.

Donc il existe des scalaires $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ non tous nuls tels que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$.

Donc : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}} \right) u_{n+1} = 0_E$. C'est une combinaison linéaire nulle de $(u_1,...,u_{n+1})$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls car $(\lambda_1,...,\lambda_n) \neq (0,...,0)$.

Donc la famille $(u_1,...,u_{n+1})$ est liée.

Conclusion : Le théorème est démontré.

Conséquence : Toutes les bases d'un espace vectoriel « de-dimension-finie » ont le même nombre de vecteurs.

Démonstration : Soient $(e_1,...,e_n)$ et $(u_1,...,u_p)$ deux bases de *E*.

Si $p > n$, alors $(u_1,...,u_p)$ contient $(u_1,...,u_{n+1})$ qui est liée d'après le théorème précédent. Donc $(u_1,...,u_p)$ serait liée, ce qui est faux.

Si $p < n$, alors $(e_1,...,e_n)$ contient $(e_1,...,e_{p+1})$ qui est liée d'après le théorème précédent. Donc $(e_1,...,e_n)$ serait liée, ce qui est faux.

Donc $p = n$. Les deux bases ont le même nombre de vecteurs.

Définition : Si un espace vectoriel *E* non réduit à $\{0_E\}$ est « de-dimension-finie », on appelle dimension de *E* le cardinal de toutes ses bases. Par convention : $\dim\{0_E\} = 0$.

2) Exemples fondamentaux

Tout vecteur de K^n s'écrit de manière unique : $u=(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $e_i=(0,...,0,1,0,...,0)$ où le 1 est en $i^{\text{ème}}$ position. Donc $(e_1,...,e_n)$ est une base de K^n.

Théorème : L'espace vectoriel K^n a pour dimension *n*. Sa base canonique est la base $(e_1,...,e_n)$ avec $e_i=(0,...,0,1,0,...,0)$, où le 1 est en $i^{\text{ème}}$ position.

Tout polynôme appartenant à $K_n[X]$, donc de degré inférieur ou égal à *n*, possède des coefficients uniques : $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où X^k est le polynôme $x \mapsto x^k$.

Théorème : L'espace vectoriel $K_n[X]$ a pour dimension $(n+1)$. Sa base canonique est la base $(1,X,...,X^n)$.

L'espace vectoriel $E=\mathscr{F}(D,K)$ ne possède pas de dimension.
Par contre, par analogie, on peut dire que l'espace vectoriel $K[X]$ est de dimension infinie avec une base « infinie » $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Mais le programme ne concerne que les espaces de dimension finie.
Toute matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(K)$ est caractérisée par ses éléments uniques : $A=(a_{i,j})$ et peut donc s'écrire de manière unique : $A=\sum_{i,j} a_{i,j}E_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme de la ligne *i* et de la colonne *j* qui vaut 1.

Théorème : L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ a pour dimension *np*. Sa base canonique est la base $(E_{i,j})$, où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme de la ligne *i* et de la colonne *j* qui vaut 1.

3) Propriétés des espaces vectoriels de dimension *n*

Propriétés des familles libres : Dans un espace vectoriel de dimension $n\geq 1$:
- Toute famille libre a au plus *n* vecteurs.
- Toute famille libre de *n* vecteurs est une base.
- Toute famille libre peut être complétée en une base (Théorème de la base incomplète).

Démonstration :
- Toute famille de plus de *n* vecteurs contient une famille de $(n+1)$ vecteurs qui est liée. Donc elle est liée. Donc les familles libres ont au plus *n* vecteurs.
- Soit $(u_1,...,u_n)$ une famille libre de vecteurs de *E* et $F=\text{Vect}<u_1,...,u_n>$.
  Soit *u* un vecteur de *E*. La famille $(u_1,...,u_n,u)$ contient $(n+1)$ vecteurs, donc est liée. Donc il existe des coefficients non tous nuls tels que : $\alpha_1u_1+...+\alpha_nu_n+\alpha u=0_E$.
  Si $\alpha=0$, on a $\alpha_1u_1+...+\alpha_nu_n=0_E$, donc $\alpha_1=...=\alpha_n=0$ car $(u_1,...,u_n)$ est libre. Donc tous les coefficients seraient nuls, ce qui est exclus. Donc $\alpha\neq 0$.
  Donc $u=-\frac{\alpha_1}{\alpha}u_1-...-\frac{\alpha_n}{\alpha}u_n$. Donc tout vecteur *u* de *E* est combinaison linéaire de la famille $(u_1,...,u_n)$, qui est donc génératrice. C'est donc une base puisqu'elle est libre et génératrice.
- Soit $(u_1,...,u_p)$ une famille libre de vecteurs de *E*. Donc $p\leq n$.
  Si $p=n$, d'après le théorème précédent, $(u_1,...,u_p)$ est une base de *E*.

Si $p < n$, $(u_1,...,u_p)$ n'est pas une base de E (il faudrait n vecteurs), et donc $F_0 = \text{Vect} < u_1,...,u_p >$ n'est pas égal à E. Donc il existe un vecteur u_{p+1} qui appartient à E, mais pas à F_0.

Si $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p + \alpha_{p+1} u_{p+1} = 0_E$ et si $\alpha_{p+1} \neq 0$, alors u_{p+1} serait combinaison linéaire de $(u_1,...,u_p)$, donc appartiendrait à F_0 ce qui est exclus. Donc $\alpha_{p+1} = 0$. Or $(u_1,...,u_p)$ est libre donc $\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$. Donc la famille $(u_1,...,u_p,u_{p+1})$ est libre.

Si $p+1 = n$, d'après le théorème précédent, $(u_1,...,u_p,u_{p+1})$ est une base de E.

Si $p+1 < n$, $(u_1,...,u_{p+1})$ n'est pas une base de E (il faudrait n vecteurs), et donc $F_1 = \text{Vect} < u_1,...,u_{p+1} >$ n'est pas égal à E. Donc il existe un vecteur u_{p+2} qui appartient à E, mais pas à F_1. Donc la famille $(u_1,...,u_p,u_{p+1},u_{p+2})$ est libre.

Et on recommence jusqu'à ce qu'on ait n vecteurs. On obtient alors une base de E en rajoutant $(n-p)$ vecteurs.

<u>Propriétés des familles génératrices</u> : Dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$:
- de toute famille génératrice finie on peut extraire une base.
- toute famille génératrice a au moins n vecteurs.
- toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

<u>Démonstration</u> :
- Soit $G = (u_1,...,u_p)$ une famille génératrice de E. Il s'agit de montrer qu'elle contient une base. C'est exactement la même démonstration que pour le théorème d'existence de base.
- Dans l'espace de dimension n, cette base a n vecteurs. Donc $n \leq p$. Donc toute famille génératrice a au moins n vecteurs.
- Enfin, si $p = n$, la base extraite est la famille elle-même. Donc G est une base.

<u>Propriétés des sous-espaces vectoriels</u> : Dans un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$:
- Tout sous-espace vectoriel F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
- Un sous-espace vectoriel F est égal à E si et seulement si $\dim F = \dim E$.
- Tout sous-espace vectoriel de E admet un sous-espace vectoriel supplémentaire.
- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E avec $F \subset G$, alors $\dim F \leq \dim G$ et l'on a l'équivalence $F = G \Leftrightarrow \dim F = \dim G$.
- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors on a : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
- Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F + G$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

<u>Démonstration</u> :
- Soit F un sous-espace vectoriel de E.

  Si $F = \{0_E\}$, alors F est de dimension finie : $\dim F = 0$, et donc $\dim F \leq \dim E$.

  Sinon, F contient au moins un vecteur non nul u, et donc une famille libre (u).

  Donc l'ensemble $\mathscr{L}$ des familles libres contenues dans F est non vide.

  Donc $\{\text{Card}\, L \,/\, L \in \mathscr{L}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée par $n = \dim E$ car toute famille de plus de n vecteurs est liée. Elle a donc un plus grand élément $p \leq n$. Donc F a une famille libre $L = (e_1,...,e_p)$ et pour tout $u \in F$, la famille

$(e_1,...,e_p,u)$ est liée. Donc, toujours avec le même raisonnement, tout vecteur u de F est combinaison linéaire des vecteurs de L. Donc L est génératrice de F. Donc F a une famille génératrice finie, donc est « de dimension finie ». De plus L est libre et génératrice. C'est donc une base. Or $p \leq n$. Donc $\dim F \leq \dim E$.

- Si $p = n$, L est une famille libre de n vecteurs dans E, donc une base de E. Donc $F = E$. La réciproque est évidente.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E. Il possède une base $(e_1,...,e_p)$ qui est une famille libre de E, donc qui peut être complétée en une base de E en ajoutant $(n-p)$ vecteurs $(e_{p+1},...,e_n)$. Soit $G = \text{Vect} < e_{p+1},...,e_n >$.

  Tout vecteur de E est combinaison linéaire de $(e_1,...,e_n)$, donc somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Donc $E = F + G$.

  Soit $u \in F \cap G$. Donc $u = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p = \alpha_{p+1} e_{p+1} + ... + \alpha_n e_n$. On a donc : $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p - \alpha_{p+1} e_{p+1} - ... - \alpha_n e_n = 0_E$. Or $(e_1,...,e_n)$ est une base de E, donc est libre. Donc : $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Donc $u = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. Donc F et G sont supplémentaires. On remarque que : $\dim F + \dim G = \dim E$.
- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E avec $F \subset G$, alors F est un sous-espace vectoriel de G. Donc on applique les propriétés 1 et 2.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et de G. Il admet donc un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G. Et, d'après la remarque précédente, on a les relations : $\dim F = \dim F' + \dim(F \cap G)$ et $\dim G = \dim G' + \dim(F \cap G)$.

  Soit B_1 une base de F', B_2 une base de $F \cap G$ et B_3 une base de G'.

  Tout vecteur de F est combinaison linéaire de $B_1 \cup B_2$ et tout vecteur de G est combinaison linéaire de $B_2 \cup B_3$. Donc $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ est une famille génératrice de $F + G$. Montrons qu'elle est libre.

  Supposons que $B_1 = (e_1,...,e_p)$, $B_2 = (e_{p+1},...,e_q)$ et $B_3 = (e_{q+1},...,e_m)$.

  Si $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k = 0_E$, alors : $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k e_k = -\sum_{k=q+1}^{m} \alpha_k e_k$. Donc un vecteur de F est égal à un vecteur de G'. Il appartient donc à $F \cap G$ et à G'. Donc c'est 0_E.

  Donc : $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k e_k = \sum_{k=q+1}^{m} \alpha_k e_k = 0_E$.

  Puisque $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k e_k = 0_E$, alors : $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = -\sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k e_k$. Donc un vecteur de F' est égal à un vecteur de $F \cap G$. Donc c'est 0_E.

  Donc : $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k e_k = \sum_{k=q+1}^{m} \alpha_k e_k = 0_E$.

  Donc $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$ puisque B_1, B_2 et B_3 sont libres.

  Donc $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ est libre. Donc c'est une base de $F + G$.

  Donc
  $\dim(F+G) = \dim F' + \dim(F \cap G) + \dim G' = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$ équivaut à $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ car $\dim(F+G) = \dim E$, donc à F et G supplémentaires.

- $E = F + G$ et $\dim F + \dim G = \dim E$ équivaut à $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ car $\dim(F \cap G) = 0$, donc à F et G supplémentaires.

<u>Définitions</u> : Dans un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$:
- Un sous-espace vectoriel de dimension 1 s'appelle une droite vectorielle.
- Un sous-espace vectoriel de dimension 2 s'appelle un plan vectoriel.
- Un sous-espace vectoriel de dimension $(n-1)$ s'appelle un hyperplan.

Dans un espace vectoriel de dimension 2, les hyperplans sont des droites vectorielles.
Dans un espace vectoriel de dimension 3, les hyperplans sont des plans vectoriels.

<u>Définition</u> : Dans un espace vectoriel E de dimension n, on appelle rang de la famille $(u_1,...,u_p)$ de vecteurs de E la dimension du sous-espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect} < u_1,...,u_p >$.

Donc, si E est un espace vectoriel de dimension n, une famille de vecteurs de E est une famille génératrice de E si et seulement si elle est de rang n.