SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Dans tout le chapitre, $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$.

I – Définitions

1) Equations linéaires

Définition : On appelle équation linéaire à p inconnues $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_p$ toute équation de la forme : $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_px_p=b$.
Les éléments $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_p$ et b appartiennent à K et sont les coefficients de l'équation.
L'équation est homogène si $b=0$.
Une solution de cette équation est un p-uplet (ou p-liste) $(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in K^p$ qui vérifie l'équation.

Résoudre l'équation, c'est trouver l'ensemble S de toutes les solutions.

Définition : Deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Si tous les coefficients a_j sont nuls et si $b\neq 0$, alors $S=\varnothing$.

Si tous les coefficients a_j sont nuls et si $b=0$, alors $S=K^{\boldsymbol{p}}$.

2) Systèmes d'équations linéaires

Un système de n équations linéaires à p inconnues est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1p}x_p=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2p}x_p=b_2\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{np}x_p=b_n \end{cases}$$

On note a_{ij} le coefficient de x_j dans la ligne L_i. Les solutions sont les p-uplets (ou p-listes) $(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in K^p$ qui vérifient simultanément les n équations.

Résoudre le système, c'est donc trouver l'ensemble S de toutes les solutions. C'est l'intersection des ensembles de solutions de chaque ligne : $S=S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_n$.

Si tous les coefficients a_{ij} de la ligne L_i sont nuls et si $b_i\neq 0$, alors $S_i=\varnothing$, donc l'intersection est $S=\varnothing$.

Si tous les coefficients a_{ij} de la ligne L_i sont nuls et si $b_i=0$, alors $S_i=K^{\boldsymbol{p}}$, donc S est l'intersection de tous les autres ensembles de solutions, ce qui revient à dire que l'on peut supprimer la ligne L_i sans changer l'ensemble de solutions.

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

II – Méthodes de résolution

1) Méthode de substitution

Le principe est de choisir une équation, de calculer dans cette équation l'une des inconnues en fonction des autres, puis de la remplacer par cette expression dans toutes les autres équations, puis de recommencer.

Remarque : L'interversion des lignes ne change pas l'ensemble des solutions.

Exemple : $(1)\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 4x+3y-3z=7 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z=7-2x-y \\ 4x+3y-3(7-2x-y)=7 \\ 3x+y-2(7-2x-y)=2 \end{cases}$ donc : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z=7-2x-y \\ 10x+6y=28 \\ 7x+3y=16 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z=7-2x-y \\ 5x+3y=14 \\ 7x+3y=16 \end{cases}$ donc : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z=7-2x-y \\ y=\dfrac{14}{3}-\dfrac{5}{3}x \\ 7x+3\left(\dfrac{14}{3}-\dfrac{5}{3}x\right)=16 \end{cases}$.

Donc : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z=7-2x-y \\ y=\dfrac{14}{3}-\dfrac{5}{3}x \\ 2x=2 \end{cases}$ donc : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z=7-2x-y \\ y=\dfrac{14}{3}-\dfrac{5}{3}x \\ x=1 \end{cases}$ donc : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$.

Le système a un unique triplet solution $(1,3,2)$. Et $S=\{(1,3,2)\}$.

Définition : Un système de Cramer d'ordre n est un système de n équations linéaires à n inconnues qui admet une unique solution.

2) Méthode du pivot de Gauss

L'idée principale est de se dire que certains systèmes sont plus faciles à résoudre que d'autres :

$(1)\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 4x-3y+3z=7 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$ est moins facile à résoudre que $(2)\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 7y+z=17 \\ z=3 \end{cases}$

Plus le système a de coefficients nuls, plus il est facile à résoudre.
On détermine donc des opérations élémentaires sur les lignes qui transforment le système en un système équivalent plus facile à résoudre.

On obtient un système équivalent :
- en intervertissant deux lignes L_i et L_j (opération codée $L_i \leftrightarrow L_j$).
- en multipliant une ligne L_i par un réel non nul k (opération codée $L_i \leftarrow kL_i$).
- en ajoutant à une ligne L_i une autre ligne L_j (opération codée $L_i \leftarrow L_i + L_j$).

La démonstration en est évidente.
Chaque opération élémentaire doit être codée.
La méthode du pivot de Gauss est simplement l'organisation d'une succession de ces opérations élémentaires pour aboutir à un système triangulaire ou diagonal. Cette méthode a l'avantage d'être souvent la plus économique et surtout de pouvoir être programmée sur ordinateur.

Exemple 1 : $(1)\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 4x+3y-3z=7 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$.

On choisit une ligne de référence que l'on garde intacte (ici L_1) et on la combine avec les autres lignes pour éliminer une variable (ici x) dans les autres équations.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=7 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \quad y-5z=-7 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad y+7z=17 & L_3 \leftarrow -2L_3+3L_1 \end{cases}$$

Ensuite, on garde toujours intacte la première ligne et on recommence le procédé avec le système formé par les autres équations. La nouvelle ligne de référence sera L_2 et la variable éliminée sera y (car c'est la variable dont les coefficients sont les plus simples).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=7 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \quad y-5z=-7 & L_2 \leftarrow L_2 \\ \quad 12z=24 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

Un tel système se résout aisément en commençant par la dernière équation.

On trouve $z=2$, puis $y=5z-7=3$, puis $x=\frac{1}{2}(7-y-z)=1$.

Le système a un unique triplet solution $(1,3,2)$. Et $S=\{(1,3,2)\}$.

Parfois la résolution aboutit à l'un des cas particuliers cités au 1) :

<u>*Exemple 2*</u> : $(2)\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+8z=1 \\ 3x+2y+17z=1 \end{cases}$. Donc $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \quad y-2z=5 & L_2 \leftarrow -L_2+2L_1 \\ \quad 4y-8z=8 & L_3 \leftarrow -L_3+3L_1 \end{cases}$

Donc $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=3 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \quad y-2z=5 & L_2 \leftarrow L_2 \\ \quad 0=-12 & L_3 \leftarrow L_3-4L_2 \end{cases}$.

La dernière équation n'a pas de solution. Donc $S=\varnothing$.

<u>*Exemple 3*</u> : $(3)\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{cases}$. Donc $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=6 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \quad 5y-10z=10 & L_2 \leftarrow -L_2+2L_1 \\ \quad 5y-10z=10 & L_3 \leftarrow -L_3+4L_1 \end{cases}$

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=6 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \quad y-2z=2 & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ \quad 0=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$. La dernière équation est identiquement vérifiée pour tout (x,y,z). Donc on peut la supprimer. Donc : $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=6 \\ y-2z=2 \end{cases}$.

Il n'y a pas assez d'équations pour calculer x, y et z. Donc on exprime deux des inconnues en fonction de la troisième : $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z+2 \\ y=2z+2 \end{cases}$. Tous les triplets de la forme $(-z+2, 2z+2, z)$ où z est un réel quelconque sont solutions. Il y a donc une infinité de solutions et $S=\{(-z+2,2z+2,z)\,/\,z\in\mathbb{R}\}$.

3) <u>Ecriture matricielle</u>

On constate en réalité que les manipulations sur les lignes ne sont guidées que par les coefficients du premier membre. De plus, est-il utile de réécrire x, y et z à toutes les lignes? On associe donc à tout système linéaire le tableau des coefficients des premiers membres (matrice du système) éventuellement complété par les coefficients des seconds membres (matrice complétée du système). On fera les transformations sur les matrices et seulement à la fin du calcul, on reviendra au système pour interpréter.

Exemple : La matrice est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et la matrice complétée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$.

La résolution devient une série de transformations de la matrice complétée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 7 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow -2L_3 + 3L_1 \end{array}, \text{ puis } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

On peut s'arrêter là et calculer à la main *x*, *y* et *z* ou continuer jusqu'à obtenir $\begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \\ z = \ldots \end{cases}$

On ramène les coefficients de la diagonale à 1 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{12}L_3 \end{array}$

Puis on fait apparaître des 0 en dehors de la diagonale en commençant par la dernière colonne :

d'abord sur la troisième colonne : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array},$

puis sur la deuxième colonne : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$. Donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$.