DEVELOPPEMENTS LIMITES

L'enjeu de ce chapitre est de comparer au voisinage d'un point une fonction complexe à des fonctions plus simples, en l'occurrence des fonctions polynômes, pour mieux étudier son comportement.
Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel.

I – Formules de Taylor

1) Formule de Taylor avec reste intégral

On peut remarquer que toute fonction dérivable est primitive de sa dérivée.

Donc si f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle I, pour tous a et b de I, on peut écrire : $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$. Donc : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$

Si la fonction f est de classe C^2, on peut intégrer par parties en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = f'(t)$, et donc $u(t) = (t-b)$ et $v'(t) = f''(t)$. On obtient :

$$f(b) = f(a) + [(t-b)f'(t)]_a^b - \int_a^b (t-b)f''(t)dt$$

Donc $f(b) = f(a) - (a-b)f'(a) - \int_a^b (t-b)f''(t)dt$.

Donc $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)dt$.

Si la fonction f est de classe C^3, on peut intégrer par parties en posant $u'(t) = b-t$ et $v(t) = f''(t)$, et donc $u(t) = -\frac{(b-t)^2}{2}$ et $v'(t) = f^{(3)}(t)$. On obtient :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \left[-\frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}f^{(3)}(t)dt$$

Donc $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}f^{(3)}(t)dt$.

Plus généralement, on démontre le théorème suivant par récurrence :

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Pour tous a et b de I : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

L'initialisation est démontrée. Il reste à montrer l'hérédité.

Supposons donc que pour toute fonction f de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et pour tous a et b de I : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Si f est une fonction de classe C^{n+2} sur l'intervalle I, on peut intégrer par parties en posant $u'(t)=\dfrac{(b-t)^n}{n!}$ et $v(t)=f^{(n+1)}(t)$, et donc $u(t)=-\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v'(t)=f^{(n+2)}(t)$. On obtient :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b-\int_a^b-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$$

Donc : $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\displaystyle\int_a^b\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$.

Donc : $f(b)=\sum_{k=0}^{n+1}\dfrac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\displaystyle\int_a^b\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$.

Donc l'hérédité est démontrée, ce qui termine la récurrence.

La formule obtenue est la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral.

<u>Exemple</u> : La fonction ln est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$. Ses dérivées successives sont : $\ln^{(0)}(x)=\ln x$, $\ln^{(1)}(x)=\dfrac{1}{x}$, et $\ln^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

On applique la formule de Taylor à l'ordre n entre 1 et x :

$$\ln x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!}\ln^{(k)}(1)+\int_1^x\frac{(x-t)^n}{n!}\times\ln^{(n+1)}(t)dt.$$

Donc : $\ln x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{(x-1)^k}{k}+(-1)^{n+1}\displaystyle\int_1^x\dfrac{(x-t)^n}{t^{n+1}}dt$.

En particulier : $\ln 2=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}+(-1)^{n+1}\displaystyle\int_1^2\dfrac{(2-t)^n}{t^{n+1}}dt$

<u>Corollaire</u> : Si $P\in\mathbb{R}^n[X]$, alors pour tous réels a et x : $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

En effet, P est C^∞, donc C^{n+1} et $P^{(n+1)}=0$.

<u>Exemple</u> : $P(x)=x^3-5x^2+7x+4$, $P^{(1)}(x)=3x^2-10x+7$, $P^{(2)}(x)=6x-10$, $P^{(3)}(x)=6$.

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k=P(-1)+P^{(1)}(-1)(x+1)+\frac{1}{2}P^{(2)}(-1)(x+1)^2+\frac{1}{6}P^{(3)}(-1)(x+1)^3$$

$$P(x)=-9+20(x+1)-8(x+1)^2+(x+1)^3$$

Ceci peut par exemple être utile pour des intégrations.

2) <u>Formule (égalité) de Taylor-Lagrange</u>

Il s'agit de donner une autre expression du reste.

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Pour tous a et b de I distincts, il existe $c\in]a,b[$ tel que : $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.

On note la condition $c\in]a,b[$, mais cela signifie c compris strictement entre a et b sans imposer d'ordre entre a et b.

Démonstration : Puisque $a \neq b$, on pose : $A = \dfrac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$.

Donc : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A$.

Soit g la fonction g définie par : $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \dfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$.

La fonction f est de classe C^{n+1}, donc g est de classe C^1 sur I. Or $g(a) = g(b) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que : $g'(c) = 0$.

Or : $g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \dfrac{(b-x)^n}{n!} A$.

Dans la première somme on pose $j = k-1$ et dans la deuxième $j = k$.

Donc : $g'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{(b-x)^j}{j!} f^{(j+1)}(x) - \sum_{j=0}^{n} \dfrac{(b-x)^j}{j!} f^{(j+1)}(x) + \dfrac{(b-x)^n}{n!} A$.

Donc : $g'(x) = \dfrac{(b-x)^n}{n!}[A - f^{(n+1)}(x)]$. Donc : $A = f^{(n+1)}(c)$

Donc : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Remarque : On connaît l'existence de c, mais pas son expression.
La formule peut aussi s'écrire en posant $h = b - a$:

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \text{ avec } \theta \in]0,1[}$$

3) Inégalité de Taylor-Lagrange

Elle est obtenue en majorant le reste.

Théorème : Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I telle que $\forall t \in I \quad \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M$. Alors pour tous a et b de I :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque : Puisque f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$, sa dérivée $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, et donc bornée ainsi que sa valeur absolue. Donc le réel M existe.

Démonstration : D'après l'égalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \text{ et } \left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq M$$

Cette inégalité va permettre de calculer une valeur approchée de $f(b)$ connaissant les diverses dérivées de f en un point a proche et donne un majorant de l'erreur commise.

Exemple : $\left| \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \right| \leq \dfrac{x^5}{120}$ et $\left| \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \right| \leq \dfrac{x^4}{24}$ ($a = 0$ et $b = x$).

Donc, au voisinage de 0 : $\sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \underset{0}{=} o(x^4)$ et $\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \underset{0}{=} o(x^3)$.

4) **Formule de Taylor-Young**

Théorème : Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I et a un point de I. Alors il existe une fonction ε définie sur I telle que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et :

$$\forall x\in I \quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x).$$

Démonstration : On note : $I_x=]a,x[$ si $a<x$ et $I_x=]x,a[$ si $a>x$.

f est de classe C^n sur I, donc d'après l'égalité de Taylor-Lagrange au rang $(n-1)$:

$$\forall x\in I-\{a\} \quad \exists c_x\in I_x \quad f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c_x).$$

Donc : $\forall x\in I-\{a\} \quad f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}[f^{(n)}(c_x)-f^{(n)}(a)]$.

On définit la fonction ε par $\varepsilon(a)=0$ et : $\forall x\in I-\{a\} \quad \varepsilon(x)=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(c_x)-f^{(n)}(a)]$.

Or, par encadrement : $\lim\limits_{x\to a}c_x=a$, donc par continuité de $f^{(n)}$: $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

Remarque : Dans cette formule, le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ n'est pas explicité. Il est par définition négligeable devant $(x-a)^n$ puisque $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$. La formule est souvent écrite sous la forme : $\forall x\in I \quad f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o\left((x-a)^n\right)$.

Exemple : $\forall x\in\mathbb{R} \quad e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$.

En l'appliquant, on obtient des « développements limités ».

II – Développements limités

1) **Définitions**

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (mais pas forcément en 0) et n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité en 0 à l'ordre n s'il existe une fonction ε définie sur D_f et un polynôme P_n appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall x\in D_f \quad f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

On note : f admet un $DL_n(0)$.

Cela revient à dire que : $\forall x\in D_f \quad f(x)=P_n(x)+o(x^n)$.

Exemple : On sait que $1+x+x^2+....+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x\neq 1$.

Donc $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$ si $x\neq 1$.

Ici : $P_n(x)=1+x+x^2+....+x^n$ et $\varepsilon(x)=\frac{x}{1-x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Donc $x\mapsto\frac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$ pour tout n : $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+....+x^n+o(x^n)$.

De la même manière, on définit des développements limités en a.

Une fonction *f* admet un $DL_n(a)$ si la fonction $h \overset{g}{\mapsto} f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$, donc s'il existe une fonction η et un polynôme P_n appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall h \in D_g \quad g(h) = P_n(h) + h^n \eta(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \eta(h) = 0$. En posant $x = a + h$, la formule devient : $\forall x \in D_f \quad f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \eta(x-a)$. Et on pose : $\varepsilon(x) = \eta(x-a)$.

<u>Définition</u> : Soit *f* une fonction définie au voisinage de *a* (mais pas forcément en *a*) et *n* un entier naturel. On dit que *f* admet un développement limité en *a* à l'ordre *n* s'il existe une fonction ε définie sur D_f et un polynôme P_n appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\forall x \in D_f \quad f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note : *f* admet un $DL_n(a)$.

On peut écrire : $\forall x \in D_f \quad f(x) = P_n(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$.

Cela revient à dire qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ tels que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Il ne faut évidemment pas développer les termes $(x-a)^k$.

<u>Remarque</u> : On peut remarquer que, pour obtenir un $DL_n(a)$, on pourra effectuer un changement de variable en posant $h = x - a$ et rechercher un $DL_n(0)$. Cela explique que les développements limités usuels sont tous en 0 et que l'on ne démontrera que les propriétés des développements limités en 0. Elles s'étendront immédiatement aux autres points.

2) <u>Unicité</u>

On peut d'abord remarquer que si une fonction *f* admet un $DL_n(0)$, on peut écrire :

$\forall x \in D_f \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Donc : $\forall x \in D_f \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1}[\alpha_n x + x\varepsilon(x)]$.

Donc $\forall x \in D_f \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1}\eta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \eta(x) = 0$.

Donc la fonction *f* admet un $DL_{n-1}(0)$.

On a obtenu le $DL_{n-1}(0)$ en tronquant le $DL_n(0)$. On peut recommencer :

<u>Théorème</u> : Si la fonction *f* admet un $DL_n(a)$, elle admet des $DL_k(a)$ pour tout entier $k \leq n$. Ils sont tous obtenus par troncature du $DL_n(a)$.

On peut en déduire par récurrence l'unicité du développement limité.

<u>Initialisation</u> : Supposons que *f* admette deux $DL_0(0)$:

$\forall x \in D_f \quad f(x) = P_0(x) + x^0 \varepsilon(x) = \alpha_0 + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

et $\forall x \in D_f \quad f(x) = Q_0(x) + x^0 \eta(x) = \beta_0 + \eta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \eta(x) = 0$

Donc *f* admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha_0 = \beta_0$. Donc : $\forall x \in D_f \quad \varepsilon(x) = \eta(x)$.

Il y a donc unicité du $DL_0(0)$.

<u>Hérédité</u> : Supposons que *f* admette un unique $DL_n(0)$ et montrons qu'alors elle admet un unique $DL_{n+1}(0)$.

Pour cela, supposons qu'elle admette deux $DL_{n+1}(0)$:

$\forall x \in D_f \quad f(x) = P_{n+1}(x) + x^{n+1}\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

$\forall x \in D_f \quad f(x) = Q_{n+1}(x) + x^{n+1}\eta(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta(x) = 0$.

On a vu que les deux troncatures à l'ordre *n* de ces deux $DL_{n+1}(0)$ sont des $DL_n(0)$. Donc les deux troncatures sont égales d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc les polynômes P_{n+1} et Q_{n+1} ne diffèrent que par leur terme de plus haut degré et d'après l'égalité avec $f(x)$, on a :

$\forall x \in D_f \quad \alpha_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x) = \beta_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\eta(x)$.

Donc $\forall x \in D_f - \{0\} \quad \alpha_{n+1} + \varepsilon(x) = \beta_{n+1} + \eta(x)$. Donc $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$ par passage à la limite en 0. Donc les polynômes P_{n+1} et Q_{n+1} sont égaux, et donc $\forall x \in D_f - \{0\} \quad \varepsilon(x) = \eta(x)$. Il y a donc unicité du $DL_{n+1}(0)$.

<u>Théorème</u> : Si une fonction *f* admet un $DL_n(a)$, ce développement limité est unique.

On peut donc donner un nom aux éléments du développement limité.

<u>Définition</u> : Si une fonction *f* admet un $DL_n(a)$, la fonction polynômiale $x \mapsto P_n(x-a)$ s'appelle la partie régulière (ou principale) du développement limité.

On peut déduire de l'unicité certaines remarques :

Si *f* est une fonction paire, alors tous les termes impairs de son $DL_n(0)$ sont nuls.
Si *f* est une fonction impaire, alors tous les termes pairs de son $DL_n(0)$ sont nuls.

3) <u>Existence de développements limités</u>

Etudions d'abord quelques cas particuliers.

Une fonction *f* admet un $DL_0(a)$ si et seulement si il existe un réel α tel que : $\forall x \in D_f \quad f(x) = \alpha + \varepsilon(x)$ puisque un polynôme de degré 0 est une constante. Donc c'est équivalent à dire que *f* admet une limite réelle en *a* car $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$. Donc :

<u>Théorème</u> : Il y a deux cas :
- Si la fonction *f* est définie en *a*, elle admet un $DL_0(a)$ si et seulement si elle est continue en *a*.
- Si la fonction *f* n'est pas définie en *a*, elle admet un $DL_0(a)$ si et seulement si elle est prolongeable par continuité en *a*.

Une fonction *f* admet un $DL_1(a)$ si et seulement si il existe des réels α et β tels que : $\forall x \in D_f \quad f(x) = \alpha + \beta(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.

On remarque alors que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-\alpha}{x-a} = \beta$.

Si *f* est définie en *a*, on obtient $\alpha = f(a)$ et $\beta = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

<u>Théorème</u> : Il y a deux cas :
- Si la fonction *f* est définie en *a*, elle admet un $DL_1(a)$ si et seulement si elle est dérivable en *a*. Alors : $\forall x \in D_f \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$
- Si la fonction *f* n'est pas définie en *a*, elle admet un $DL_1(a)$ si et seulement si elle est prolongeable par continuité en *a* et si ce prolongement est dérivable en *a*.

Par contre, au-delà de l'ordre 1, cette propriété ne s'étend pas.

<u>Exemple</u> : Soit $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left| x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|$ donc $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc : $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Donc *f* admet un $DL_2(0)$. Et pourtant elle n'est pas dérivable 2 fois en 0 :

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Or : $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

La formule de Taylor-Young donne une condition suffisante d'existence dans le cas général et l'expression de ce développement.

Théorème : Soit *f* une fonction de classe C^n sur un intervalle *I* et *a* un point de *I*. Alors la fonction *f* admet un $DL_n(a)$: $\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$

4) Exemples usuels

Il s'agit des développements limités en 0 obtenus donc par la formule de Taylor-Young.

En 0, on obtient si *f* est de classe C^n : $\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + o(x^n)$

Exemple 1 : $f(x) = e^x$. Donc $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout entier *k*.

Donc : $e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Exemple 2 : $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$:

Initialisation : évidente puisque $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Hérédité : Supposons que $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Donc $f^{(k+1)}(x) = -k!\frac{-(k+1)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$

Donc la propriété est démontrée pour tout *k*.

Donc : $\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = k!$

Donc : $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$.

Exemple 3 : $g(x) = \ln(1+x)$. Donc $g'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = f(-x)$.

On utilise les résultats précédents : $g^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}f^{(k-1)}(-x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ et $g^{(0)}(0) = 0$.

Donc : $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Exemple 4 : $f(x) = \cos x$. Les dérivées sont cycliques : $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$ et $f^{(4)}(x) = \cos x$. Donc :

$f^{(4k)}(x)=\cos x$, $f^{(4k+1)}(x)=-\sin x$, $f^{(4k+2)}(x)=-\cos x$, $f^{(4k+3)}(x)=\sin x$

Donc : $f^{(4k+1)}(0)=f^{(4k+3)}(0)=0$, $f^{(4k)}(0)=1$ et $f^{(4k+2)}(0)=-1$.

Donc : $f^{(2k+1)}(0)=0$ et $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$.

Donc : $\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$.

Exemple 5 : $g(x)=\sin x$. Donc $g'(x)=\cos x$.

On utilise les résultats précédents car $g^{(k)}(x)=f^{(k-1)}(x)$.

Donc : $g^{(2k)}(0)=0$ et $g^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$.

Donc : $\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$.

Exemple 6 : $f(x)=(1+x)^\alpha$. Donc $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$.

$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ et : $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)$ si $k\geq 1$.

Donc : $(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$.

Donc : $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+...+\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

Théorème : Pour tout entier $n\in\mathbf{N}$, les fonctions suivantes admettent pour $DL_n(0)$:

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)=1+x+x^2+...+x^n+o(x^n).$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+o(x^n)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+...+\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

Par exemple pour $\alpha=\frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$.

5) Opérations sur les développements limités

a) Somme

Supposons que *f* et *g* admettent des $DL_n(0)$:

$f(x)=P(x)+o(x^n)$ et $g(x)=Q(x)+o(x^n)$ avec $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $Q\in\mathbb{R}_n[X]$.

La somme de deux termes négligeables devant x^n est négligeable devant x^n.

Donc $f(x)+g(x)=P(x)+Q(x)+o(x^n)$.
Or la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Donc $P+Q\in\mathbb{R}_n[X]$.

<u>Théorème</u> : Si f et g admettent chacun un $DL_n(a)$, alors $f+g$ admet un $DL_n(a)$, dont la partie régulière est la somme des parties régulières des $DL_n(a)$ de f et de g.

<u>Remarque</u> : Si f et g admettent des développements limités d'ordres différents, on se ramène au cas précédent par troncature.

<u>Exemple</u> : $DL_4(0)$ de $f(x)=\sin x+\cos x$.

On sait que : $\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$ et $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$.

Donc : $f(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$.

b) <u>Produit par un réel</u>

Si α est un réel, le produit par α d'un terme négligeable devant x^n est négligeable devant x^n. Donc : $\alpha f(x)=\alpha P(x)+o(x^n)$
Or le produit d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n par un réel est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Donc $\alpha P\in\mathbb{R}_n[X]$.

<u>Théorème</u> : Si f admet un $DL_n(a)$ et si α est un réel, alors αf admet un $DL_n(a)$, dont la partie régulière est le produit par α de la partie régulière du $DL_n(a)$ de f.

<u>Exemple</u> : $DL_4(0)$ de $g(x)=\frac{2}{1-x}-3\ln(1+x)$.

On sait que : $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)$ et $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$

Donc : $g(x)=2-x+\frac{7}{2}x^2+x^3+\frac{11}{4}x^4+o(x^4)$.

c) <u>Produit</u>

$$f(x)=P(x)+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k+x^n\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0.$$

$$g(x)=Q(x)+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k x^k+x^n\varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0.$$

Donc : $f(x)g(x)=P(x)Q(x)+x^n\varepsilon_1(x)Q(x)+x^n\varepsilon_2(x)P(x)+x^{2n}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$

On pose : $\varepsilon_3(x)=\varepsilon_1(x)Q(x)+\varepsilon_2(x)P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$.

Donc : $f(x)g(x)=P(x)Q(x)+x^n\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0$.

Donc : $f(x)g(x)=P(x)Q(x)+o(x^n)$.
Le produit PQ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$. Or tous les termes de degré supérieur ou égal à $n+1$ sont négligeables devant x^n. Donc si R est la troncature de ce polynôme à l'ordre n : $P(x)Q(x)=R(x)+o(x^n)$.

Donc : $f(x)g(x)=R(x)+o(x^n)$.

<u>Théorème</u> : Si f et g admettent chacun un $DL_n(a)$, alors fg admet un $DL_n(a)$, dont la partie régulière est la troncature d'ordre n du produit des parties régulières des $DL_n(a)$ de f et de g.

Remarque : Si f et g admettent des développements limités d'ordres différents, on se ramène au cas précédent par troncature.

Exemple 1 : $DL_3(0)$ de $h(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}\ln(1+x)$.

On sait que : $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$ et $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$$P(x)Q(x)=(1+x+x^2+x^3)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{3}x^6$$

Donc : $P(x)Q(x)=x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{6}x^3+o(x^3)$. Donc : $h(x)=x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{6}x^3+o(x^3)$.

Exemple 2 : $DL_3(0)$ de $f(x)=e^{2x}=(e^x)^2$.

On sait que : $e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$.

$$[P(x)]^2=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)^2=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{7}{12}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{36}x^6$$

Donc : $f(x)=1+2x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)$. Cela revient à remplacer x par $2x$, donc à faire une composition de fonction..

d) Composition

Théorème : Si f admet un $DL_n(a)$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et si g admet un $DL_n(b)$, alors $g\circ f$ admet un $DL_n(a)$, dont la partie régulière est la troncature d'ordre n de la composée des parties régulières des développements limités de f et de g.

On le démontre pour $a=b=0$, donc on suppose que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

$$f(x)=P(x)+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k+x^n\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0.$$

Or : $\alpha_0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Donc $P_n(x)=xT(x)$ avec $T\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$g(x)=Q(x)+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k x^k+x^n\varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0.$$

Donc : $(g\circ f)(x)=Q[f(x)]+[f(x)]^n\varepsilon_2[f(x)]$.

Donc : $(g\circ f)(x)=Q[f(x)]+x^n[T(x)+x^{n-1}\varepsilon_1(x)]^n\varepsilon_2[f(x)]$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2[f(x)]=0$.

Donc $(g\circ f)(x)=Q[f(x)]+o(x^n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\beta_k[P(x)+x^n\varepsilon_1(x)]^k+o(x^n)$.

Or : $\forall k\in[\![1,n]\!]\quad [P(x)+x^n\varepsilon_1(x)]^k=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}[P(x)]^j[x^n\varepsilon_1(x)]^{k-j}$.

Or si $k-j\geq 1$, alors $[x^n\varepsilon_1(x)]^{k-j}=o(x^n)$.

Donc : $\forall k\in[\![1,n]\!]\quad [P(x)+x^n\varepsilon_1(x)]^k=[P(x)]^k+o(x^n)$

Donc : $(g\circ f)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\beta_k[P(x)]^k+o(x^n)=(Q\circ P)(x)+o(x^n)$.

Or $Q\circ P$ est un polynôme de degré $2n$. Donc si R est la troncature de ce polynôme à l'ordre n : $(Q\circ P)(x)=R(x)+o(x^n)$. Donc : $(g\circ f)(x)=R(x)+o(x^n)$.

Exemple 1 : $DL_3(0)$ de $f(x)=\ln(1+\sin x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Donc on compose un $DL_3(0)$ de $\sin x$ avec un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$.

$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3)$. Or : $u=\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$.

$$f(x)=\ln(1+\sin x)=\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^3+o(x^3)$$

Donc en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3 :

$f(x)=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$. Donc : $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$.

Exemple 2 : $DL_3(0)$ de $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1-x}=1$ donc on écrit $f(x)=\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-x}=0$.

Donc on compose un $DL_3(0)$ de $\frac{2x}{1-x}$ avec un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$.

Pour avoir un $DL_3(0)$ de $\frac{2x}{1-x}=2x\times\frac{1}{1-x}$, il suffit d'avoir un $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-x}$.

Or : $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+o(x^2)$. Donc : $\frac{2x}{1-x}=2x+2x^2+2x^3+o(x^3)$.

Et : $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3)$. Ici : $u=2x+2x^2+2x^3+o(x^3)$

$$f(x)=(2x+2x^2+2x^3)-\frac{1}{2}(2x+2x^2+2x^3)^2+\frac{1}{3}(2x+2x^2+2x^3)^3+o(x^3)$$

On développe en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3 :

$$f(x)=(2x+2x^2+2x^3)-\frac{1}{2}(4x^2+8x^3)+\frac{1}{3}(8x^3)+o(x^3)$$

Donc : $f(x)=2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$.

e) <u>Quotient</u>

Tout d'abord, le quotient de deux fonctions est le produit du numérateur par l'inverse du dénominateur. Donc le problème revient à chercher un développement limité de l'inverse d'une fonction.

Si $f(x)=P(x)+o(x^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)$, alors $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\alpha_0$.

<u>1er cas</u> : Si $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq 0$, alors : $f(x)=\alpha_0\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)\right)$.

Donc : $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\alpha_0}\times\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)}=\frac{1}{\alpha_0}\times\frac{1}{1-u}$ avec $u=-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)\right)=0$ donc on obtient un $DL_n(0)$ par composition.

Exemple 1 : Cherchons le $DL_5(0)$ de $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x\times\frac{1}{\cos x}$.

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)\right)$. Et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = 0$.

Donc : $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1-u}$ avec $u = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5)$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^5 + o(x^5)$$

Donc en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 5 :

$\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)$. Et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$.

Donc : $\tan x = \left(x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4\right) + o(x^5)$.

Donc : $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

<u>**2^{ème} cas**</u> : Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, alors : $\alpha_0 = 0$. Soit $p = \mathrm{Min}\{k \in [\![1,n]\!] / \alpha_k \neq 0\}$.

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n) = x^p\left[\sum_{k=p}^{n} \alpha_k x^{k-p} + o(x^{n-p})\right] = x^p\left[\sum_{j=0}^{n-p} \alpha_{j+p} x^j + o(x^{n-p})\right] = x^p g(x).$$

Donc : $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^p} \times \dfrac{1}{g(x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$.

On est donc ramené au problème précédent pour la fonction *g*. Mais pour avoir un $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{g}$, il faut un $DL_n(0)$ de *g*, donc un $DL_{n+p}(0)$ de *f*.

<u>*Exemple 2*</u> : Cherchons le $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{e^x - 1 - x}$

$$e^x - 1 - x = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = x^2\left[\sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!} + o(x^{n-2})\right] = x^2\left[\sum_{j=0}^{n-2} \frac{x^j}{(j+2)!} + o(x^{n-2})\right].$$

Pour avoir un $DL_3(0)$, il faudra prendre $n = 5$.

$$e^x - 1 - x = x^2\left[\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120} + o(x^3)\right] = \frac{x^2}{2}\left[1 - \left(-\frac{x}{3} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{60} + o(x^3)\right)\right]$$

Donc : $\dfrac{1}{e^x - 1 - x} = \dfrac{2}{x^2} \times \dfrac{1}{1 - \left(-\dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^3}{60} + o(x^3)\right)}$.

Or : $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$. Ici : $u = -\dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^3}{60} + o(x^3)$. Donc :

$$\frac{1}{e^x - 1 - x} = \frac{2}{x^2}\left[1 + \left(-\frac{x}{3} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{60}\right) + \left(-\frac{x}{3} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{60}\right)^2 + \left(-\frac{x}{3} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{60}\right)^3 + o(x^3)\right]$$

$$\frac{1}{e^x - 1 - x} = \frac{2}{x^2}\left[1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{60} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{27} + o(x^3)\right] = \frac{2}{x^2}\left[1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{540} + o(x^3)\right]$$

Puisqu'on divise par x^2, il faut aussi un $DL_5(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)=x^2\left[-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{5}+o(x^3)\right].$$

Donc : $f(x)=2\left[-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{5}+o(x^3)\right]\left[1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{36}+\frac{x^3}{540}+o(x^3)\right]$.

Donc : $f(x)=-1+x-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{12}x^3+o(x^3)$.

<u>Remarque</u> : Si l'on n'avait pas pu mettre x^2 en facteur au numérateur, on n'aurait pas eu un développement limité en 0. Donc lorsque l'on cherche un développement limité d'un quotient, il faut commencer par évaluer par quelles puissances de *x* on va pouvoir factoriser pour déterminer à quel ordre il faut faire les développements.

f) Intégration

Supposons que *f* admette un $DL_n(0)$: $f(x)=P(x)+o(x^n)$ avec $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

Donc la fonction définie par : $\varepsilon(x)=\dfrac{f(x)-P(x)}{x^n}$ si $x\neq 0$ et $\varepsilon(0)=0$ est continue.

Soit *F* une primitive de *f* : $F(x)-F(0)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x P(t)dt+\int_0^x t^n\varepsilon(t)dt$.

Or $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Donc : $\forall\eta>0\quad\exists\alpha>0\quad\forall x\in]-\alpha,+\alpha[\quad|\varepsilon(x)|\leq\eta$.

Donc : $\forall x\in]-\alpha,+\alpha[\quad\left|\int_0^x t^n\varepsilon(t)\right|\leq\int_0^{|x|}\left|t^n\varepsilon(t)\right|dt\leq\eta\int_0^{|x|}t^n dt$.

Donc : $\forall\eta>0\quad\exists\alpha>0\quad\forall x\in]-\alpha,+\alpha[-\{0\}\quad\left|\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\varepsilon(t)\right|\leq\frac{1}{n+1}\eta$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\varepsilon(t)=0$. Et donc : $\int_0^x t^n\varepsilon(t)=o(x^{n+1})$.

Donc : $F(x)=F(0)+\int_0^x P(t)dt+o(x^{n+1})$.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une fonction continue qui admet un $DL_n(a)$, alors toute primitive *F* de *f* admet un $DL_{n+1}(a)$ dont la partie régulière est la primitive de la partie régulière de *f* qui prend en *a* la valeur $F(a)$.

Cela correspond à ce que l'on avait remarqué sur les exemples usuels entre $\sin x$ et $\cos x$ par exemple, ou entre $\frac{1}{1+x}$ et $\ln(1+x)$.

<u>Autre exemple</u> : $\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1})$ en 0. Et $\arctan 0=0$.

Donc : $\arctan x=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$.

<u>Remarque</u> : Si l'on sait que *f* admet un $DL_n(a)$, on ne sait rien sur sa dérivée. Cependant si l'on sait que f' possède aussi un $DL_{n-1}(a)$, alors il s'obtient par dérivation de celui de *f*.

III – Applications

1) Calculs de limites

Exemple : Il s'agit de calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1-2x}{\sin^2 x}$

On détermine un développement limité du numérateur et du dénominateur en 0. Le problème est de déterminer un ordre qui donne au moins un terme significatif.

On a : $e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$, donc dans e^u-1-u, on met u^2 en facteur. Donc, en posant $u=2x$, puisque $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$: $e^{2x}-1-2x = 2x^2+o(x^2)$.

D'autre part : $\sin x = x+o(x^2)$. Donc : $\sin^2 x = x^2+o(x^2)$.

Donc : $\dfrac{e^{2x}-1-2x}{\sin^2 x} = \dfrac{2x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \dfrac{2+o(1)}{1+o(1)}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x}{\sin^2 x} = 2$.

En effet, un terme de la forme $o(1)$ est négligeable devant 1, donc tend vers 0.

2) Recherche d'équivalents

C'est souvent utilisé pour étudier des convergences de séries ou d'intégrales.

Exemple : Etudier la convergence de la série de terme général : $u_n = \dfrac{\ln(1+e^{1/n})-\ln 2}{e^{1/\sqrt{n}}-1}$.

On a : $e^x = 1+x+o(x)$. Donc, en posant $x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$:

$e^{1/\sqrt{n}} = 1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Donc : $e^{1/\sqrt{n}}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Et en posant $x=\dfrac{1}{n}$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$: $e^{1/n} = 1+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc : $\ln\left(1+e^{1/n}\right) = \ln\left[2+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right] = \ln 2+\ln\left[1+\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$

Donc : $\ln\left(1+e^{1/n}\right)-\ln 2 = \ln\left[1+\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right] = \dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Donc : $u_n = \dfrac{\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$. Donc : $u_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ à l'infini.

Donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui est divergente (Riemann $\alpha<1$).

3) Etude locale d'une fonction

Il s'agit d'étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point a. On peut en outre déterminer l'équation de la tangente en ce point et la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exemple : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ si $x>0$ et $x\neq 1$.

On se ramène d'abord en 0 pour utiliser des développements limités connus.

On pose $h = x-1$, donc $x = 1+h$. Alors $f(x) = \dfrac{\ln(1+h)}{2h+h^2}$.

Etudier f au voisinage de 1 revient à étudier $g(h)=\dfrac{\ln(1+h)}{2h+h^2}$ au voisinage de 0.

$\ln(1+h)=h-\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{3}h^3+o(h^3)$. Donc :

$$g(h)=\frac{\ln(1+h)}{2h+h^2}=\frac{1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2+o(h^2)}{2+h}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2+o(h^2)\right)\times\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}h\right)}.$$

Or : $\dfrac{1}{1-u}=1+u+u^2+o(u^2)$. Donc, en posant $u=-\dfrac{1}{2}h$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0 : $\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}h\right)}=1-\dfrac{1}{2}h+\dfrac{1}{4}h^2+o(h^2)$.

Donc : $g(h)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}h+\dfrac{1}{3}h^2+o(h^2)\right)\left(1-\dfrac{1}{2}h+\dfrac{1}{4}h^2+o(h^2)\right)$.

Donc : $g(h)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}h+\dfrac{5}{12}h^2+o(h^2)$.

Donc : $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{5}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$. On prolonge f par continuité en posant $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

On en déduit aussi : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{12}(x-1)+o(x-1)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

L'équation de la tangente en 1 est : $y=f(1)+(x-1)f'(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(x-1)$.

Ce sont les deux premiers termes du $DL_2(1)$ de f.

De plus : $f(x)-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(x-1)=\dfrac{5}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$.

Donc : $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}}{(x-1)^2}=\dfrac{5}{12}+o(x-1)$. Donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}}{(x-1)^2}=\dfrac{5}{12}$.

Donc au voisinage de 1, $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}}{(x-1)^2}\geq 0$, donc $f(x)-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x-1}{2}\geq 0$.

Donc la courbe est au dessus de sa tangente en 1.

<u>Bilan</u> : Si f admet un $DL_0(a)$, f est continue en a. Si f admet un $DL_1(a)$, f est dérivable en a. L'équation de la tangente est $y=P_1(x-a)$ si P_1 est non nul. La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le terme suivant :

- Si c'est $b(x-a)^{2k}$ avec $b>0$, la courbe est au dessus de la tangente.
- Si c'est $b(x-a)^{2k}$ avec $b<0$, la courbe est en dessous de la tangente.
- Si c'est $b(x-a)^{2k+1}$, la courbe traverse sa tangente : on a un point d'inflexion.

4) Asymptote

Le principe est le même, mais en $\pm\infty$.

L'étude en $\pm\infty$ se ramène à une étude en 0 en posant $h=\dfrac{1}{x}$.

Exemple : Soit *f* la fonction définie par : $f(x)=(2x-1)e^{1/x}$ si $x\neq 0$.
Il s'agit d'étudier le comportement à l'infini de la fonction *f*.
On se ramène d'abord en 0 pour utiliser des développements limités connus.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Donc on pose $h=\dfrac{1}{x}$, donc $x=\dfrac{1}{h}$ et $f(x)=\left(\dfrac{2}{h}-1\right)e^h$.

Etudier *f* à l'infini revient à étudier $g(X)=\left(\dfrac{2}{X}-1\right)e^X$ au voisinage de 0.

Or : $e^h=1+h+\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{6}h^3+o(h^3)$.

Donc : $g(h)=\left(\dfrac{2}{h}-1\right)\left(1+h+\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{6}h^3+o(h^3)\right)$.

Donc : $g(h)=\dfrac{2}{h}-1+2-h+h-\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{3}h^2+o(h^2)$.

Donc : $g(h)=\dfrac{2}{h}+1-\dfrac{1}{6}h^2+o(h^2)$. Donc : $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{6x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

On en déduit d'abord que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[-\dfrac{1}{6x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=0$.

Donc la droite d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique à la courbe en $\pm\infty$.

Et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)-(2x+1)}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{6}+\varepsilon(x)\right)=-\dfrac{1}{6}$ est négative.

Donc, $\dfrac{f(x)-(2x+1)}{\frac{1}{x^2}}<0$ au voisinage de l'infini, ainsi que $f(x)-(2x+1)<0$.

Donc la courbe est en dessous de son asymptote.